Complemente de Fizică

Daniela Buzatu, Cristina Stan

10 noiembrie 2003

Cuprins

Capitolul 1

Vectori

Unele mărimi fizice sunt complet determinate printr-o singură **proprietate, care este chiar valoarea lor numerică**. Aceste mărimi, cum ar fi: temperatura, volumul, timpul, energia, frecvenţa, se numesc **scalari**. Operaţiile matematice cu scalari sunt operaţii aritmetice obişnuite.
Există însă mărimi fizice a căror descriere completă necesită specificarea **direcţiei**, **sensului** şi respectiv a **punctului de aplicaţie**. Aceste mărimi se numesc **vectori**, iar exemple în acest sens sunt: viteza, acceleraţia, forţa, impulsul, momentul unghiular, momentul forţei, etc.

1.1 Reprezentarea unui vector

Există mai multe posibilităţi de exprimare a unui vector: *geometrică*, *analitică*, *matricială*. Fiecare dintre ele prezintă avantaje şi limite, de aceea reprezentările sunt alese şi folosite în funcţie de problema concretă care se doreşte a fi rezolvată.

1.1.1 Reprezentarea geometrică

Un vector este reprezentat ca un segment orientat, care porneşte dintr-un punct numit **origine** sau **punct de aplicaţie**. Segmentul este aşezat pe dreapta suport AA' şi are sensul indicat de vârful săgeţii (Fig.1).

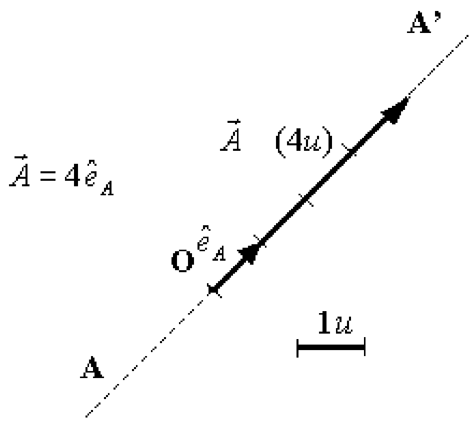


Fig. 1

Ca urmare, un vector este caracterizat de următoarele patru mărimi:

- **origine** (punct de aplicaţie) - punctul de unde porneşte
- **direcţie** - dreapta suport pe care este aşezat
- **sens** - indică încotro se îndreaptă
- **modul**(mărime) - valoarea numerică

Modulul sau **mărimea** vectorului este proporţională cu lungimea segmentului orientat. Modulul vectorului se notează $\left|\vec{A}\right|$ sau A.
Să considerăm un vector de mărime egală cu unitatea, notat $\vec{e}_A$, orientat pe direcţia şi în sensul vectorului $\vec{A}$. Acesta se numeşte **versor**[1]. În aceste condiţii, se poate scrie:

$$\vec{A} = A\vec{e}_A \tag{1.1}$$

1.1.2 Reprezentarea analitică

În reprezentarea analitică, un vector se exprimă prin proiecţiile sale pe un sistem de axe ortogonale, de exemplu, sistemul cartezian (Fig. 2).
Să notăm cu A_x, A_y, A_z proţiile lui $\vec{A}$ de-a lungul axelor $Ox, Oy,$-Oz. Atunci:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{1.2}$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sunt versorii direcţiilor Ox, Oy, Oz.
Mărimea vectorului se află folosind teorema lui Pitagora:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.3}$$

De exemplu dacă: $\vec{v} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$(m/s), atunci $v_x = 7$m/s, $v_y = -3$m/s, şi $v_z = 2$m/s; prin urmare
$v = \sqrt{49 + 9 + 4}$ m/s=$\sqrt{62}$m/s=7.87m/s.

[1] În literatura de specialitate se folosesc şi alte notaţii pentru versori.

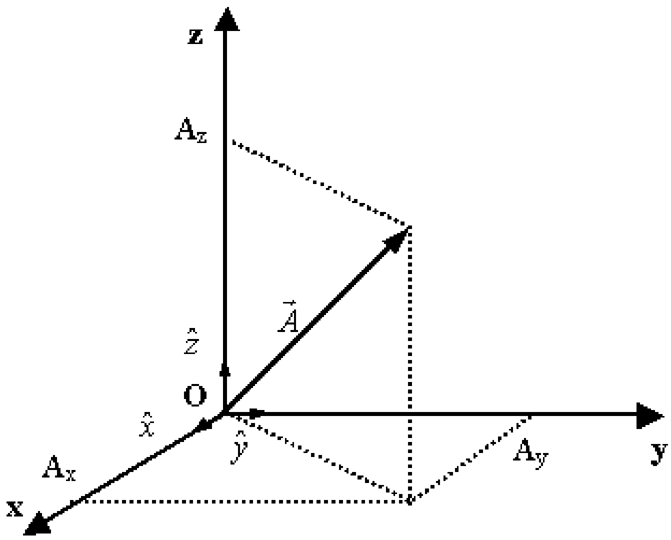


Fig. 2

1.1.3 Reprezentarea matricială

Orice vector poate fi exprimat ca o matrice cu o singură linie sau cu o singură coloană, fiecare element al acesteia reprezentând componenta (proiecţia vectorului) pe o anumită direcţie. De exemplu, dacă vectorul este reprezentat analitic prin relaţia (1.1.2), atunci :

$$\vec{A} = (A_x \quad A_y \quad A_z) \tag{1.4}$$

sau

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

1.2 Operaţii cu vectori

1.2.1 Adunarea şi scăderea vectorilor

Fie $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ doi vectori oarecare. **Suma** $\vec{A}+\vec{B}$ este, de asemenea, un vector:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C} \tag{1.1}$$

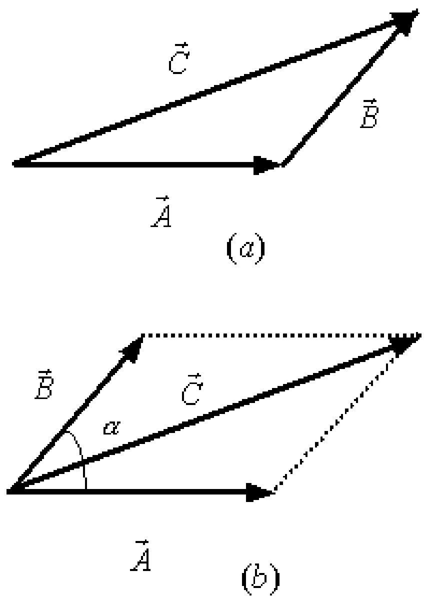


Fig. 3: (a) metoda poligonului; (b) metoda paralelogramului

Mărimea vectorului rezultant se poate determina prin oricare din modalitaţile de reprezentare ale vectorilor discutate anterior.

În Fig. 3 sunt reprezentate două metode geometrice de aflare ale vectorului sumă.

Prin **regula poligonului** (Fig. 3a) vectorul rezultant a doi (sau mai mulţi) vectori se află trasând segmentul ce închide conturul poligonal construit din vectorii aşezaţi vârf-origine. Originea vectorului rezultant se află în originea primului vector iar vârful - în vârful ultimului vector al sumei.

În Fig. 3b este ilustrată adunarea a doi vectori prin metoda paralelogramului. Conform **regulii paralelogramului**, vectorul rezultant este diagonala mare a paralelogramului construit de cei doi vectori concurenţi $\vec{A}$ şi $\vec{B}$.

Din Fig. 3 se observă că **adunarea este comutativă**. Această construcţie geometrică permite calculul mărimii vectorului sumă cu ajutorul teoremei lui Pitagora generalizate:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha} \tag{1.2}$$

Dacă suma a doi vectori este egală cu zero, atunci vectorii sunt egali ca mărime şi au sensuri opuse.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = -\vec{A} \tag{1.3}$$

Această relaţie defineşte **vectorul opus** şi permite definirea operaţiei de **scădere** a doi vectori ca adunarea dintre un vector, $\vec{A}$, cu vectorul opus, $(-\vec{B})$.

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.4}$$

Să exemplificăm, în continuare, adunarea vectorilor, plecând de la reprezentarea lor analitică. În coordonate carteziene:

$$\vec{A} \;=\; A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{1.5}$$

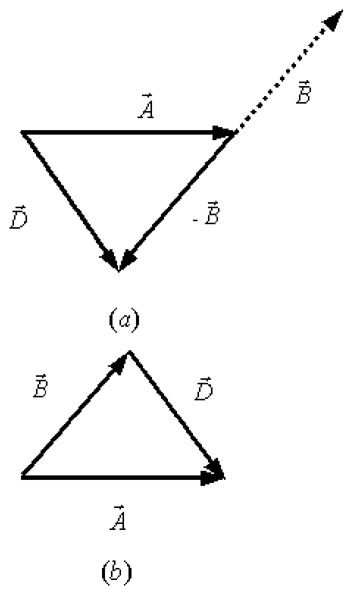


Fig. 4: Determinarea vectorului diferenţă, $\vec{D}$; (a) prin adunarea lui $\vec{A}$ cu vectorul opus $-\vec{B}$; (b) vectorul diferenţă, $\vec{D}$, uneşte vârfurile celor doi vectori $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ şi are sensul înspre vectorul descăzut

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \tag{1.6}$$

Componentele vectorului sumă se află prin adunarea algebrică a componentelor (proiecţiilor) corespunzătoare, pe direcţiile Ox, Oy şi Oz.

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\,\vec{i} + (A_y + B_y)\,\vec{j} + (A_z + B_z)\,\vec{k} \tag{1.7}$$

$$\vec{D} = (A_x - B_x)\,\vec{i} + (A_y - B_y)\,\vec{j} + (A_z - B_z)\,\vec{k} \tag{1.8}$$

Această procedură analitică poate fi generalizată pentru adunarea a n vectori $\vec{R}_i$, $i = 1, 2, 3..., n$.
Dacă se cunosc proiecţiile acestor vectori pe axele sistemului de coordonate carteziene, R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}, atunci, vectorul sumă este:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \tag{1.9}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{1.10}$$

unde

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} R_{ix},\ R_y = \sum_{i=1}^{n} R_{iy},\ R_z = \sum_{i=1}^{n} R_{iz} \tag{1.11}$$

1.2.2 Înmulţirea vectorilor

Există mai multe posibilităţi de înmulţire a vectorilor. Acestea depind de contextul problemei, rezultatul înmulţirii vectoriale fiind - în unele cazuri - mărimi vectoriale sau scalare.

Înmulţirea unui vector cu un scalar

Din înmulţirea unui vector, $\vec{A}$ cu un scalar μ, rezultă un alt vector, $\vec{A}'$, de mărime μA.

$$\vec{A}' = \mu\vec{A} = \overrightarrow{\mu A} \tag{1.12}$$

Direcţia vectorului $\vec{A}'$ este aceeaşi cu a vectorului $\vec{A}$, iar mărimea şi sensul său depind de valoarea scalarului μ:

- dacă $\mu > 0$ sensul lui $\vec{A}'$ este sensul lui $\vec{A}$;
- dacă $\mu < 0$ sensul lui $\vec{A}'$ este contrar sensului lui $\vec{A}$.

Un exemplu de înmulţire a unui vector cu un scalar a fost deja ilustrat în relaţia (1.1.1) şi în Fig. 1.

Propietăţile adunării şi înmulţirii vector-scalar.

- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$
- $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$
- $(\lambda\mu)\,\vec{A} = \lambda\left(\mu\vec{A}\right) = \mu\left(\lambda\vec{A}\right) = \mu\lambda\vec{A}$
- $(\lambda + \mu)\,\vec{A} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{A}$
- $\lambda\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \lambda\vec{A} + \lambda\vec{B}$
- $0\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot 0 = \vec{0}$

Produsul scalar

Produsul scalar a doi vectori se notează cu " · ". Rezultatul operaţiei de înmulţire scalară a doi vectori **este un scalar**:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha \tag{1.13}$$

unde α reprezintă unghiul dintre vectorii $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ (Fig. 5).
Dacă vectorii $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ sunt perpendiculari, produsul scalar este nul, întrucât $\cos 90^0 = 1$.

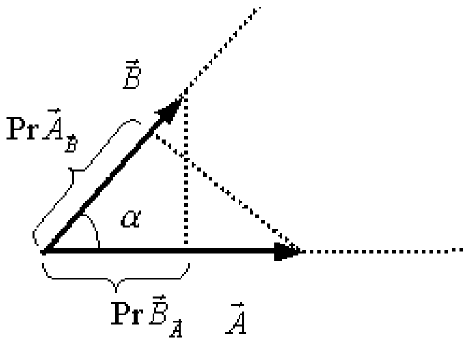


Fig. 5: Interpretarea geometrică a produsului scalar

Din definiţia dată de (1.13) se observă că produsul scalar este **comutativ**:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \tag{1.14}$$

Cu ajutorul Fig. 5 se poate da o **interpretare geometrică** a produsului scalar a doi vectori. Aşa cum rezultă din figură, proiecţia vectorului $\vec{A}$ pe dreapta suport a lui $\vec{B}$ este:

$$Pr_{\vec{B}}\vec{A} = A \cos \alpha \tag{1.15}$$

astfel încât:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A \cos \alpha) B \tag{1.16}$$

La fel:

$$Pr_{\vec{A}}\vec{B} = B \cos \alpha \tag{1.17}$$

astfel încât:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot Pr_{\vec{A}}\vec{B} \tag{1.18}$$

Componenta unui vector pe o axă este proiecţia acestuia pe direcţia acelei axe. Deoarece direcţia şi sensul fiecărei axe este determinată de un versor corespunzător, se poate scrie:

$$A_x = A\cos(\vec{A},\vec{i}) = \vec{A} \cdot \vec{i} \tag{1.19}$$

$$A_y = A\cos(\vec{A},\vec{j}) = \vec{A} \cdot \vec{j} \tag{1.20}$$

$$A_x = A\cos(\vec{A},\vec{k}) = \vec{A} \cdot \vec{k} \tag{1.21}$$

Cosinuşii unghiurilor dintre vectorul $\vec{A}$ şi axele Ox, Oy, Oz se numesc **cosinuşi directori**.

$$\cos(\vec{A},\vec{i}) = \frac{A_x}{A} = \alpha_1 \tag{1.22}$$

$$\cos(\vec{A},\vec{j}) = \frac{A_y}{A} = \beta_1 \tag{1.23}$$

$$\cos(\vec{A},\vec{k}) = \frac{A_z}{A} = \gamma_1 \tag{1.24}$$

unde α_1, β_1 şi γ_1 sunt cosinuşii directori ai lui $\vec{A}$. Ca urmare:

$$\vec{A} = A \cdot (\alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j} + \gamma_1\vec{k}) = A\vec{e_A} \tag{1.25}$$

unde:

$$\vec{e}_A = \alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j} + \gamma_1\vec{k} \tag{1.26}$$

este versorul direcţiei lui $\vec{A}$. Într-adevăr:

$$\vec{e}_A \cdot \vec{e}_A = 1 \tag{1.27}$$

deoarece:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \tag{1.28}$$

Întrucât versorii au componentele $\vec{i}(1,0,0), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)$ şi sunt reciproc perpendiculari, atunci produsul lor scalar va fi:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (1.29)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (1.30)$$

iar produsul scalar al vectorilor $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ şi $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ se exprimă ca:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.31)$$

Exemple de mărimi definite ca produs scalar sunt: lucrul mecanic, fluxul câmpului gravitaţional, al câmpului electric sau al câmpului magnetic etc.

Produsul vectorial

Produsul vectorial a doi vectori $\vec{A}$ şi $\vec{B}$, notat cu " $\times$ " are ca rezultat **un vector**, $\vec{C}$.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \quad (1.32)$$

Prin convenţie, produsul vectorial este un vector perpendicular pe planul format de $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ (Fig. 6). Sensul lui $\vec{C}$ este stabilit de *regula burghiului drept*: **se aşează burghiul perpendicular pe planul format de cei doi vectori şi se roteşte în sensul suprapunerii primului vector al produsului peste cel de-al doilea pe drumul cel mai scurt. Sensul de înaintare al burghiului este sensul vectorului rezultant**.
O astfel de regulă de înmulţire ne atenţioneaza asupra faptului că **produsul vectorial este anticomutativ**:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (1.33)$$

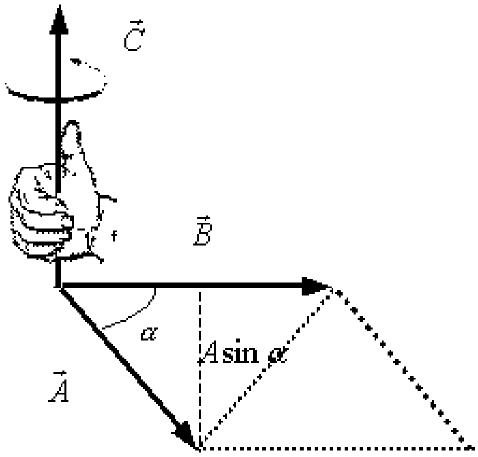


Fig. 6: Ilustrarea regulii burghiului

Mărimea vectorului rezultant este dată de relaţia:

$$C = AB\sin\alpha \tag{1.34}$$

Cu ajutorul Fig. 6 se poate da **interpretarea geometrică a produsului vectorial**. Se constată că modulul lui $\vec{C}$ reprezintă o jumătate din aria paralelogramului construit de cei doi vectori.

Să calculăm produsul vectorial folosind acum reprezentarea analitică:

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}) \\ &= A_xB_x(\vec{i}\times\vec{i})+A_xB_y(\vec{i}\times\vec{j})+A_xB_z(\vec{i}\times\vec{k}) \\ &+A_yB_x(\vec{j}\times\vec{i})+A_yB_y(\vec{j}\times\vec{j})+A_yB_z(\vec{j}\times\vec{k})\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$+A_zB_x(\vec{k}\times\vec{i})+A_zB_y(\vec{k}\times\vec{j})+A_zB_z(\vec{k}\times\vec{k}) \qquad (1.36)$$

Deoarece produsul vectorial a doi vectori coliniari este zero, iar:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad (1.37)$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad (1.38)$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, \qquad (1.39)$$

se obţine:

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= \vec{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{k}(A_xB_y-A_yB_x)\\ &= \vec{i}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (1.40)\end{aligned}$$

Produsul mixt

Produsul mixt include ambele tipuri de înmulţiri dintre vectori. Rezultatul produsului scalar dintre vectorii $\vec{C}$ şi produsul vectorial al altor doi vectori $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ este un scalar, D:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=D \qquad (1.41)$$

Dacă vectorii sunt cunoscuţi pe componente, atunci produsul mixt se poate calcula sub forma unui determinant caracteristic:

$$D=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \qquad (1.42)$$

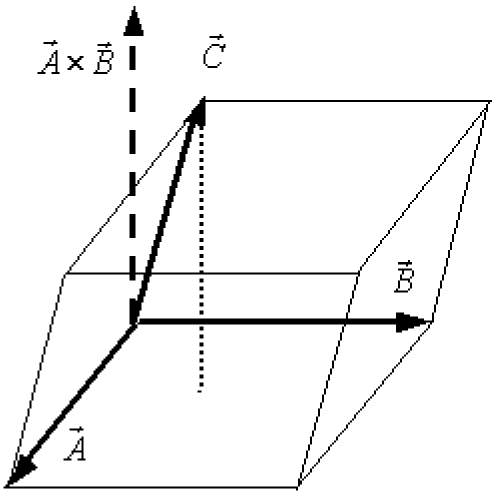


Fig.7: Interpretarea geometrică a produsului mixt

Ţinând cont de semnificaţia geometrică a produsului vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$, precum şi a produsului scalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$, din Fig. 7, rezultă că mărimea lui D este egală cu volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori (necoplanari).

$$
\begin{aligned}
V &= \text{aria bazei} \times \text{înălţimea} && (1.43)\\
&= \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| C\cos(\vec{A}\times\vec{B},\vec{C}) && (1.44)\\
&= \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C} && (1.45)
\end{aligned}
$$

Din (1.42) se observă că produsul mixt nu-şi schimbă valoarea dacă cei trei vectori sunt comutaţi ciclic:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C} = \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \cdot \vec{A} = \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) \cdot \vec{B} \tag{1.46}$$

Triplul produs vectorial

Rezultatul aplicării produsului vectorial între trei vectori este un vector. Deoarece efectuarea repetată a produsului vectorial între vectori este un lucru destul de dificil, acesta se calculează cu ajutorul unor produse scalare[2] şi anume:

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{C}\right) - \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \tag{1.47}$$

1.2.3 Derivarea vectorilor

Să considerăm un vector, $\vec{A}$, exprimat în funcţie de o mărime scalară, de exemplu, s. Această dependenţă poate fi scrisă (în coordonate carteziene) sub forma:

$$\vec{A} = A_x(s)\vec{i} + A_y(s)\vec{j} + A_z(s)\vec{k} \tag{1.48}$$

Derivata unui vector în raport cu un scalar poate fi scrisă în acelaşi mod ca şi derivata unei funcţii scalare, adică:

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{A}(s + \Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s} \tag{1.49}$$

În cazul în care funcţia scalară s este, de exemplu, timpul t, derivata vectorului $\vec{A}$ devine:

[2] Această regulă este uşor de reţinut sub numele **"bac minus cab"**.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} \tag{1.50}$$

Această relaţie defineşte **viteza instantanee a vectorului** $\vec{A}$.

Procedura matematică de diferenţiere a unei funcţii vectoriale este similară, aşadar, cu cea pentru funcţii scalare. De exemplu:

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \pm \frac{d\vec{B}}{ds} \tag{1.51}$$

$$\frac{d}{ds}(f(s)\vec{A}(s)) = \frac{df}{ds}\vec{A} + f\frac{d\vec{A}}{ds} \tag{1.52}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} \tag{1.53}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{ds} \tag{1.54}$$

Toate aceste reguli vor fi folosite în cadrul cinematicii şi dinamicii punctului material şi ale sistemelor de puncte materiale.

1.2.4 Integrarea vectorilor

Trebuie să facem, mai întâi, distincţia netă dintre o **funcţie scalară**[3] de **variabilă vectorială**, de exemplu:

$$u(\vec{r}) = u(x, y, z) \tag{1.55}$$

şi o **funcţie vectorială**[4] de **variabilă vectorială**, de exemplu:

[3]Exemple de funcţii scalare: densitatea, temperatura, energia potenţială, etc.

[4]Exemple de funcţii vectoriale: viteza, intensitatea câmpului gravitaţional, electric, etc.

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}, \quad (1.56)$$

Ambele funcţii sunt definite în orice punct descris de vectorul de poziţie $\vec{r}$ şi sunt exprimate în sistemul de referinţă cartezian (Ox, Oy, Oz).
Să considerăm o curbă Γ, în spaţiul pe care este definită în orice punct funcţia vectorială. Integrala funcţiei vectoriale $\vec{a}$, de-a lungul curbei Γ, se defineşte ca:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz), \quad (1.57)$$

unde $d\vec{r}$ reprezintă variaţia vectorului de poziţie în coordonate carteziene:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (1.58)$$

O alternativă de exprimare a expresiei (1.57) este în funcţie de distanţa s măsurată de-a lungul curbei Γ faţă de un punct fix (Fig. 8). Dacă notăm cu θ unghiul dintre direcţia lui $\vec{a}$ şi tangenta la curbă în orice punct, atunci:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} a \cos\theta ds \quad (1.59)$$

1.3 Operatori vectoriali diferenţiali

Operatorii diferenţiali ce vor fi definiţi în cele ce urmează permit exprimarea locală (punctuală) a legilor fizicii. Aceşti operatori vectoriali (**gradient, divergenţă şi rotor**) pot fi exprimaţi cu ajutorul operatorului diferenţial notat "$\vec{\nabla}$"[5], numit "**nabla**".

[5] De cele mai multe ori se omite scrierea lui ∇ cu vector deasupra.

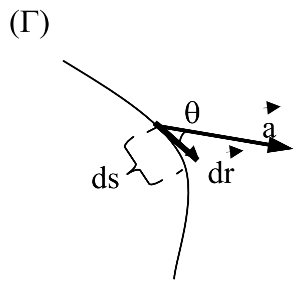


Fig. 8: Ilustrarea procesului de integrare a vectorului $\vec{a}$ de-a lungul conturului Γ

În coordonate carteziene, operatorul "nabla" are expresia[6]:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{1.60}$$

Operatorul

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \tag{1.61}$$

[6] Expresia operatorului ∇ depinde de sistemul de coordonate ales

se numeşte **operatorul Laplace** sau **"laplaceian"**.

În funcţie de modul prin care acest operator "se aplică" unei mărimi fizice scalare sau vectoriale se obţin trei situaţii distincte:

• **gradient** - dacă se aplică unei funcţii scalare
• **divergenţă** - dacă se aplică prin produs scalar unei funcţii vectoriale
• **rotor** - dacă se aplică prin produs vectorial unei funcţii vectoriale

Expresiile operatorilor vectoriali depind de sistemul de coordonate în care se definesc. Pentru simplitate, vom considera în cele ce urmează doar sistemul cartezian.

1.3.1 Operatorul gradient

Definiţie
Operatorul gradient se aplică unor funcţii scalare, transformându-le în mărimi vectoriale. Dacă notăm funcţia scalară cu $\varphi = \varphi(x, y, z)$ atunci, în coordonate carteziene, expresia *gradientului*[7] mărimii scalare este:

$$\vec{\nabla}\varphi = gr\vec{a}d\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \tag{1.62}$$

Semnificaţia fizică
Să considerăm că valorile funcţiei scalare φ nu depind, în primă

[7] Operatorul gradient este un vector, de aceea, pentru sublinierea cestui lucru, am marcat semnul vector deasupra. În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii vom omite acest semn, fără a uita însă caracteristicile vectoriale ale operatorului.

aproximaţie, decât de coordonatele punctului în care aceasta se evaluează.
Se defineşte noţiunea de **suprafaţă de "nivel" constant** sau (**suprafaţă echipotenţială** în cazul în care funcţia φ reprezintă un potenţial), locul geometric al punctelor pentru care funcţia φ are aceeaşi valoare (Fig. 9):

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = const. \tag{1.63}$$

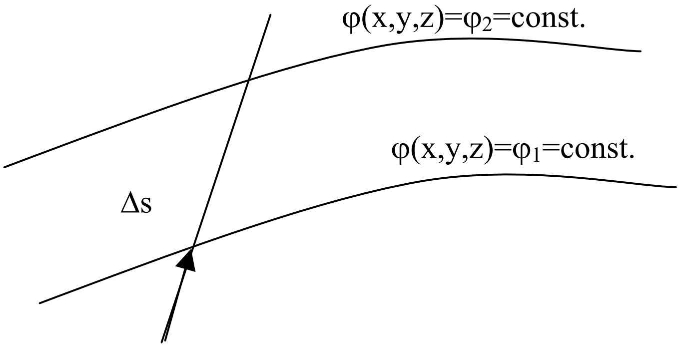


Fig. 9: Suprafeţe echipotenţiale

Variaţia funcţiei între două suprafeţe de nivel constant este:

$$\Delta\varphi = \varphi_2(x, y, z) - \varphi_1(x, y, z) \tag{1.64}$$

Din Fig. 9 se observă că valoarea $\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)$ a variaţiei funcţiei, raportată la distanţa dintre cele două suprafeţe, depinde de orientarea segmentului Δs.
Se defineşte derivata după o direcţie a funcţiei scalare φ, prin relaţia:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \tag{1.65}$$

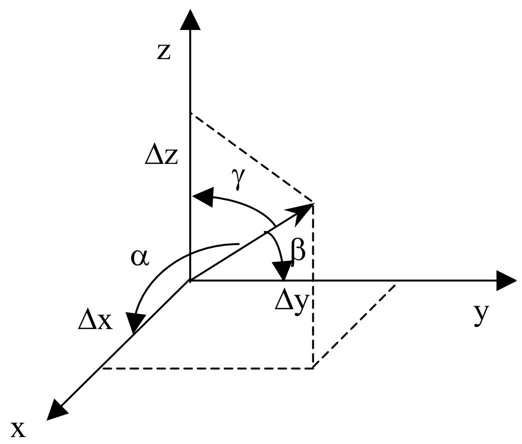


Fig. 10: Orientarea segmentului Δs în raport cu un sistem de axe carteziene.

Dacă fixăm orientarea segmentului Δs în raport cu un sistem de axe carteziene (Fig.10) şi ţinem cont de faptul că funcţia φ depinde de variabila s prin intermediul coordonatelor x, y, z, se obţine:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s} \right) \tag{1.66}$$

Relaţia devine:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma \qquad (1.67)$$

unde:

$$\cos\alpha = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad (1.68)$$

$$\cos\beta = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta s} \qquad (1.69)$$

$$\cos\gamma = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta s} \qquad (1.70)$$

Expresia (1.67) corespunde produsului scalar:

$$\frac{d\varphi}{ds} = grad\ \varphi\cdot\hat{e}_s \qquad (1.71)$$

unde:

$$grad\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.72)$$

sau

$$grad\ \varphi = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k} \qquad (1.73)$$

Se observă că **mărimea gradientului** poate fi definită ca:

$$|grad\ \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \qquad (1.74)$$

Să considerăm în continuare, un plan tangent în punctul P , (π), la suprafaţa de nivel constant $\varphi = \varphi(x, y, z) = const$ (Fig. 11). Toate punctele din planul (π) din vecinătatea punctului P sunt caracterizate de:

$$\Delta\varphi \approx 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = 0 \qquad (1.75)$$

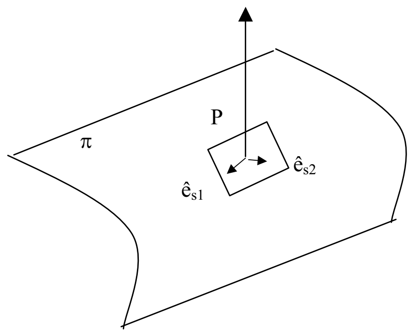


Fig. 11: Orientarea vectorului gradient

Pentru orice direcţie $\vec{e}_{s_1}$; $\vec{e}_{s_2}$; etc. din acest plan:

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = grad\ \varphi \cdot \vec{e}_{s_1} = 0 \tag{1.76}$$

$$\frac{d\varphi}{ds_2} = grad\ \varphi \cdot \vec{e}_{s_2} = 0 \tag{1.77}$$

Ca urmare, $grad\ \varphi$ este orientat perpendicular pe oricare două direcţii din planul (π). Conform teoremei celor trei perpendiculare, $\vec{\nabla}\varphi$ este perpendicular pe planul format de direcţia ei. Deci, direcţia gradientului este perpendiculară pe suprafeţele de nivel constant, în lungul normalei în punctul respectiv. Prin convenţie, se consideră că sensul vectorului $\vec{\nabla}\varphi$ este acela în care φ este crescător. Deci, cu alte cuvinte, vectorul gradient *"ţinteşte"* în direcţia celei mai rapide creşteri, în spaţiu, a lui φ.

În concluzie, principalele proprietăţile ale gradientului unei funcţii scalare ($\vec{grad}\varphi$) sunt:

• este o funcţie vectorială definită în orice punct (*"funcţie de punct"*)
• indică direcţia şi sensul celei mai rapide creşteri a funcţiei scalare
• are mărimea dată de derivata după direcţia celei mai rapide creşteri a funcţiei
•este orientat perpendicular pe suprafeţele "echipotenţiale" $\varphi = const.$, oricare ar fi mărimea fizică φ, căreia i se aplică

Vom discuta mai amănunţit semnificaţia fizică a acestui operator, în cazul definirii funcţiei potenţial scalar.

1.3.2 Divergenţă

Definiţie
Operatorul **divergenţă** se aplică funcţiilor vectoriale prin operaţia de înmulţire scalară.
Dacă notăm funcţia vectorială cu $\vec{a}$, atunci, în coordonate carteziene $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ şi expresia divergenţei este:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1.78}$$

Semnificaţia fizică
Pentru a ilustra semnificaţia fizică a operatorului divergenţă, ne vom folosi de un exemplu din mecanica fluidelor. Se defineşte în acest caz, *intensitatea curentului masic*, I, cantitatea de fluid care trece printr-o suprafaţă dS în unitatea de timp:

$$I = \frac{dm}{dt} \tag{1.79}$$

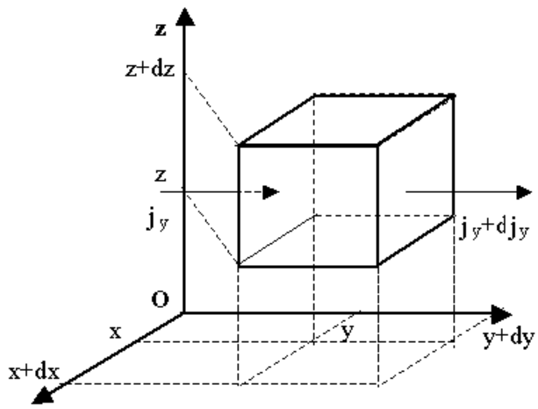


Fig. 12: Ilustrarea interpretării fizice a divergenţei

Masa dm poate fi scrisă în funcţie de valoarea vitezei unei "particule" de fluid în regiunea suprafeţei infinitezimale ds. Suprafaţa "văzută" efectiv de fluidul în curgere este $dS_n = dScos\alpha$. Cantitatea de fluid ce trece într-un timp dt prin suprafaţa dS sau (dS_n) este cuprinsă într-un cilindru de arie a bazei dS_n şi de înălţime $v \cdot dt$. Ca urmare:

$$dm = \rho dS_n v dt = \rho dS v dt cos\alpha \tag{1.80}$$

unde ρ este densitatea volumică a fluidului. Ca urmare:

$$I = \frac{dm}{dt} = \rho dS v cos\alpha \tag{1.81}$$

Se defineşte, de asemenea, densitatea curentului masic, j prin relaţia:

$$j = \frac{dm}{dS_n dt} = \rho v \tag{1.82}$$

Constatăm că, întrucât viteza este o mărime vectorială, iar ρ - un scalar, j este o mărime vectorială:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \tag{1.83}$$

Având în vedere că $\vec{v}$ se poate scrie, în coordonate carteziene, sub forma:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \tag{1.84}$$

rezultă că:

$$\vec{j} = j_x \vec{i} + j_y \vec{j} + j_z \vec{k} \tag{1.85}$$

unde:

$$j_x = \rho v_x, j_y = \rho v_y, j_z = \rho v_z. \tag{1.86}$$

Să analizăm în continuare, curgerea unui fluid în raport cu un referenţial cartezian $Oxyz$. Mărimea vectorială generică $\vec{a}$ din relaţia (1.78) va fi acum $\vec{j}$. Ne vom folosi de Fig. 12 şi vom începe discuţia noastră cu direcţia Oy din motive de vizibilitate mai bună.

Densitatea de curent pe faţa de intrare în paralelipipedul de volum elementar dV este $j_y(y)$, iar cea de ieşire $j_y(y+dy)$. Cantitatea de fluid ce intră în volumul elementar dV este:

$$dm(y) = \rho dx dz v_y(y) dt \tag{1.87}$$

iar cea care iese:

$$dm(y+dy) = \rho dxdzv_y(y+dy)dt \tag{1.88}$$

Dacă, eventual, $dm(y)$ este diferit de $dm(y+dy)$, atunci putem vorbi de o masă *netă* de fluid care ”izvorăşte” sau ”dispare”, exprimată ca:

$$dm_y = dm(y+dy) - dm(y) = \rho dxdzdt[v_y(y+dy) - v_y(y)] \tag{1.89}$$

Observaţii:

• am considerat mai sus că fluidul este incompresibil, deci $\rho(y) = \rho(y+dy) = \rho$
• dacă $dm(y+dy) > dm(y)$ se spune că dV se comportă (după această direcţie y) ca un *izvor*. În caz contrar, dV se comportă ca un *puţ* sau *dren*

Putem exprima pe $v_y(y+dy)$ sub forma unei dezvoltări în serie Taylor:

$$v_y(y+dy) = v_y(y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)dy + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)(dy)^2 + ... \tag{1.90}$$

Dacă viteza de variaţie a lui v_y cu y nu este foarte mare, atunci, într-o primă aproximaţie, putem considera că:

$$v_y(y+dy) = v_y(y) + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy \tag{1.91}$$

astfel încât:

$$dm_y = \rho dxdzdt \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \tag{1.92}$$

Relaţii similare vor putea fi scrise cu uşurinţă şi pentru direcţiile Ox şi Oz, astfel încât:

$$\begin{aligned} dm &= dm_x + dm_y + dm_z && (1.93)\\ &= \rho dxdydzdt(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}) && (1.94)\\ &= [\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}]dVdt && (1.95)\\ &= (\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z})dVdt && (1.96) \end{aligned}$$

Aşadar

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{dm}{dVdt} \tag{1.97}$$

Întrucât termenul I din relaţia (1.97) se poate scrie ca un produs scalar între operatorul $\nabla(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}, \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}, \frac{\partial}{\partial z}\hat{k})$ şi vectorul $\vec{j}(j_x, j_y, j_z)$, rezultă că:

$$\nabla \cdot \vec{j} = div\vec{j} = \frac{dm}{dVdt} \tag{1.98}$$

Cu alte cuvinte, $div\ \vec{j}$ reprezintă masa de fluid izvorâtă dintr-un volum elementar dV în unitatea de timp, raportată la valoarea lui dV. Se spune că $div\ \vec{j}$ reprezintă *productivitatea* specifică de fluid a *"izvorului" elementar* dV. Evident, cu cât izvorul va fi mai puternic, cu atât div$\vec{j}$ care îl caracterizează va fi mai mare. De altfel, termenul **divergenţă** provine de la cuvântul latin "*divergere*", care înseamnă *"a izvorî"*. Având în vedere că $dm = \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$,

în care dS este suprafaţa care înconjoară volumul elementar dV, prin integrare pe întreg volumul unei surse macroscopice de fluid vom putea scrie:

$$\int_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_V div\vec{j} \cdot dV \tag{1.99}$$

care reprezintă **teorema lui Green-Gauss-Ostrogradski**. Aceas˜a ultimă relaţie stabileşte o legătură între o integrală de suprafaţă a lui $\vec{j}$ şi una de volum a unei funcţii de $\vec{j}$.

1.3.3 Rotor

Definiţie

Operatorul **rotor** se aplică funcţiilor vectoriale prin operaţia de produs vectorial. Dacă aplicăm rotorul funcţiei vectoriale $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ se obţine:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} &= rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} \end{aligned} \tag{1.100}$$

Interpretarea fizică

Fie un vector $\vec{A}$ caracterizat prin componentele A_x, A_y, A_z în raport cu un sistem de referinţă cartezian. Să considerăm o direcţie oarecare descrisă de versorul $\vec{n}$.

În planul perpendicular pe versorul $\vec{n}$, alegem un contur infinitezimal închis dl ,care mărgineşte o suprafaţă mică ΔS. De obicei, sensul de parcurgere al conturului se stabileşte astfel încât sensul

pozitiv al versorului $\vec{n}$ să coincidă cu cel determinat prin regula burghiului drept.
Operatorul diferenţial *rot* este un vector a cărui proiecţie pe direcţia lui $\vec{n}$ este definită prin relaţia:

$$rot_n\vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl}}{\Delta S} \tag{1.101}$$

Să considerăm în cele ce urmează că vectorul $\vec{A}$ este viteza $\vec{v}$ a unui punct (element de masă) dintr-un corp rigid care se roteşte cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe de rotaţie coliniare cu versorul $\hat{n}$. În mod evident că traiectoria punctului considerat este un cerc de rază r cu centrul pe axa de rotaţie iar viteza $v = \omega r$ este orientată tangent la traiectorie. Conturul ce închide elementul de suprafaţă $\Delta S = \pi r^2$ este $\oint dl = 2\pi r$.
Conform definiţiei 1.101 se obţine:

$$rot_n\vec{v} = \lim_{r \to 0} \frac{v \oint dl}{\pi r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\omega 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega \tag{1.102}$$

Astfel, rotorul vitezei liniare a punctelor unui solid rigid aflat în mişcare de rotaţie este dublul vitezei unghiulare.
Din punct de vedere al calculului matematic este mult mai convenabilă definirea operatorului *rot* în termeni de coordonate.
Să găsim proiecţiile vectorului *rot* într-un sistem de coordonate cartezian, de exemplu de-a lungul axei Oz.
Conturul pe care se integrează este un dreptunghi cu laturile $\Delta x, \Delta y$ indicat în Fig. 13. Se obţine:

$$\oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} A_x(x,y,z)dx +$$

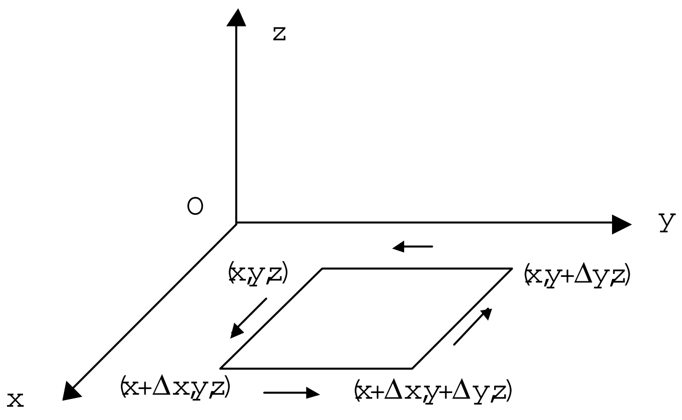


Fig. 13: Definirea operatorului *rot* în termeni de coordonate

$$\int_{(x+\Delta x,y,z)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)} A_y(x+\Delta x, y, z)dy$$

$$\int_{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)}^{(x,y+\Delta y,z)} A_x(x, y+\Delta y, z)dx +$$

$$\int\limits_{(x,y+\Delta y,z)}^{(x,y,z)} A_y(x,y,z)dy \tag{1.103}$$

Considerând că $\Delta x, \Delta y$ pot fi oricât de mici dorim, putem dezvolta termenii A_x, A_y în serii Taylor:

$$A_x(x,y+\Delta y,z) = A_x(x,y,z) + \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y}\Delta y... \tag{1.104}$$

$$A_y(x+\Delta x,y,z) = A_y(x,y,z) + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x}\Delta x + \tag{1.105}$$

Să revenim în relaţia (1.103) în care, pentru claritate, să calculăm suma între prima şi a treia întegrală, respectiv suma între a doua şi a patra integrală. După inversarea limitelor unei integrale şi apariţia semnului minus, se obţine:

$$I_1 = \int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} A_x(x,y,z)dx - \tag{1.106}$$

$$- \int\limits_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \left[A_x(x,y,z) + \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y}\Delta y\right] dx$$

$$= -\frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y}\Delta y \Delta x \tag{1.107}$$

În mod similar se obţine:

$$I_2 = -\frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x}\Delta x \Delta y \tag{1.108}$$

Ca urmare, conform definiţiei (1.101), proiecţia vectorului $rot\vec{A}$ pe axa Oz este:

$$\left(rot\vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{1.109}$$

În mod similar se obţin şi celelalte proiecţii (considerând dreptunghiuri cu laturile $\Delta y, \Delta z$ respectiv $\Delta z, \Delta x$ şi repetând procedura matematică):

$$\left(rot\vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{1.110}$$

$$\left(rot\vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{1.111}$$

Din aceste relaţii rezultă definiţia vectorului rotor în coordonate carteziene:

$$rot\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{1.112}$$

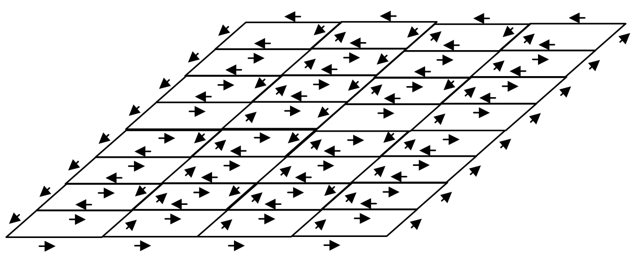


Fig. 14: Ilustrarea teoremei lui Stokes-Ampère

Să calculăm fluxul vectorului $rot\vec{A}$ printr-o suprafaţă oarecare mărginită de un contur închis, divizând suprafaţa considerată în mici elemente de suprafaţă ΔS_i.

$$\int\limits_S rot\vec{A}\cdot d\vec{S} = \sum_{(i)} \int\limits_{\Delta S_i} rot\vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad (1.113)$$

Cum ΔS_i este foarte mic se obţine în primă aproximaţie, folosind relaţia de definiţie (1.101), următoarele expresii pentru fiecare element de suprafaţă:

$$\int\limits_{\Delta S_i} rot\vec{A}\cdot d\vec{S} = \int\limits_{\Delta S_i} \left(rot\vec{A}\right)_n dS \approx \left(rot\vec{A}\right)_n \Delta S_i \approx \oint_i \vec{A}\cdot d\vec{l} \qquad (1.114)$$

Ca urmare:

$$\int\limits_S rot\vec{A}\cdot d\vec{S} \approx \sum_{(i)} \oint_i \vec{A}\cdot d\vec{l} \qquad (1.115)$$

Conform Fig. 14 se observă că integralele de pe contururile ce mărginesc două suprafeţe vecine sunt opuse ca semn (deoarece sunt parcurse în ambele sensuri) şi ca urmare se anulează reciproc. Singurii termeni ce rămân necompensaţi sunt cei de pe conturul exterior ce mărgineşte suprafaţa considerată. Considerând suprafeţele ΔS_i din ce în ce mai mici se obţine relaţia:

$$\int\limits_S rot\vec{A}\cdot d\vec{S} \approx \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} \qquad (1.116)$$

Această relaţie este cunoscută ca **teorema lui Stokes-Ampère**.

1.4 Probleme

1.1 Fie vectorii:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}\\ \vec{B} &= -\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\\ \vec{C} &= 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\end{aligned}$$

Determinaţi:

a). mărimile celor trei vectori;

b). reprezentaţi grafic vectorii;

c). valoarea numerică a vectorului $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$;

d). versorii celor trei vectori;

e). produsele scalare: $\vec{A}\cdot\vec{B},\ \vec{A}\cdot\vec{C},\ \vec{B}\cdot\vec{C}$;

f). produsele vectoriale $\vec{A}\times\vec{B},\ \vec{A}\times\vec{C},\ \vec{B}\times\vec{C}$; mărimea lor şi cosinusul unghiurilor dintre aceste perechi;

g). Vectorii $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ sunt coplanari?

h). produsul $\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}$.

Rezolvare:

a. Mărimile celor trei vectori sunt:

$$\begin{aligned}\left|\vec{A}\right| &= \sqrt{9+16+25}=7.0711\\ \left|\vec{B}\right| &= \sqrt{1+16+4}=4.5826\\ \left|\vec{C}\right| &= \sqrt{4+1+1}=2.4495\end{aligned}$$

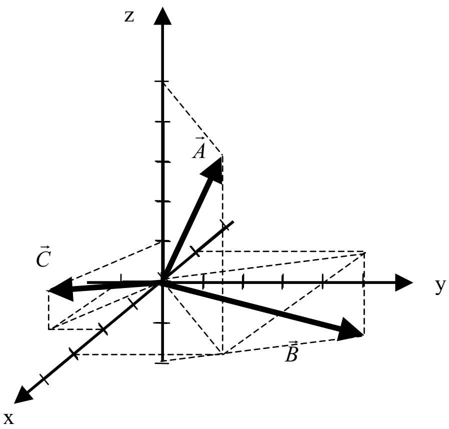


Fig. 1.1

b. Reprezentarea grafică este dată în Fig. 1.1.
c. Vectorul:

$$\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}=(3-1-2)\vec{i}+(4+4+1)\vec{j}+(5-2-1)\vec{k}=9\vec{j}+2\vec{k}$$

are valoarea numerică:

$$\left|\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}\right|=\sqrt{81+4}=9.\,2195$$

d. Versorii direcţiilor celor trei vectori sunt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\vec{A}}{A}=\frac{3}{7.\,07}\vec{i}+\frac{4}{7.\,07}\vec{j}+\frac{5}{7.\,07}\vec{k}=0.\,42\vec{i}+0.\,56\vec{j}+0.\,71\vec{k}\\
\vec{b} &= \frac{\vec{B}}{B}=-\frac{1}{4.\,58}\vec{i}+\frac{4}{4.\,58}\vec{j}-\frac{2}{4.\,58}\vec{k}=0.\,22\vec{i}+0.\,87\vec{j}+.\,443\vec{k}\\
\vec{c} &= \frac{\vec{C}}{C}=\frac{2}{2.\,45}\vec{i}-\frac{1}{2.\,45}\vec{j}+\frac{1}{2.\,45}\vec{k}=0.\,82\vec{i}+0.\,41\vec{j}+0.\,41\vec{k}
\end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= -3+16-10=3\\ \vec{A}\cdot\vec{C} &= 6-4+5=7\\ \vec{B}\cdot\vec{C} &= -2-4-2=-8\end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & 5\\ -1 & 4 & -2\end{vmatrix} = -28\vec{i}+\vec{j}+16\vec{k}\\ \vec{A}\times\vec{C} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix} = 9\vec{i}+7\vec{j}-11\vec{k}\\ \vec{B}\times\vec{C} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 4 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix} = 2\vec{i}-3\vec{j}-7\vec{k}\end{aligned}$$

Mărimea vectorilor este:

$$\begin{aligned}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| &= \sqrt{28^2+1+16^2}=32.265\\ \left|\vec{A}\times\vec{C}\right| &= \sqrt{9^2+7^2+11^2}=15.843\\ \left|\vec{B}\times\vec{C}\right| &= \sqrt{2^2+3^2+7^2}=7.874\end{aligned}$$

iar unghiurile corespunzătoare dintre fiecare pereche de vectori astfel definiţi:

$$\cos(\vec{A}\times\vec{B},\vec{A}\times\vec{C}) = \frac{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{C})}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\cdot\left|\vec{A}\times\vec{C}\right|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-28\cdot 9+1\cdot 7-16\cdot 11}{32.265\cdot 15.843} = -0.82\\
\cos(\vec{A}\times\vec{B},\vec{B}\times\vec{C}) &= \frac{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\cdot\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|}\\
&= \frac{-28\cdot 2-1\cdot 3-16\cdot 7}{32.265\cdot 7.874} = -0.67\\
\cos(\vec{A}\times\vec{C},\vec{B}\times\vec{C}) &= \frac{(\vec{A}\times\vec{C})\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}{\left|\vec{A}\times\vec{C}\right|\cdot\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|}\\
&= \frac{9\cdot 2-7\cdot 3+11\cdot 7}{15.843\cdot 7.874} = 0.59
\end{aligned}
$$

g. Pentru a vedea dacă vectorii $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ sunt copanari, se calculează produsul mixt:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 3\cdot 2-4\cdot 3-5\cdot 7 = -41$$

Deoarece valoarea acestui produs este diferită de zero înseamnă că vectorii nu sunt coplanari.
h. Pentru produsul dublu vectorial se foloseşte regula "*bac minus cab*"

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C} &= \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C})-\\
&- \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) = 7(-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k})-3(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\\
&= -13\vec{i}-31\vec{j}-17\vec{k}
\end{aligned}
$$

1.2 Fie vectorii $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ definiţi de următoarele expresii:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= ae^{-kt}\vec{i} + bt\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{B} &= (c\sin\omega t)\vec{i} + (d\cos\omega t)\vec{j}\end{aligned}$$

unde $a, b, c, k, \omega-$ constante iar t-timpul. Calculaţi:

a). $\frac{d\vec{A}}{dt}; \frac{d\vec{B}}{dt}; \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right|; \left|\frac{d\vec{B}}{dt}\right|;$

b). $\left|\vec{A}\right|; \left|\vec{B}\right|; \frac{d}{dt}\left|\vec{A}\right|; \frac{d}{dt}\left|\vec{B}\right|;$

c). $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right);$

d). $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).$

Rezolvare:

a. Folosim regulile de derivare ale vectorilor:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{d}{dt}(ae^{-kt})\vec{i} + \frac{d}{dt}(bt)\vec{j} = -kae^{-kt}\vec{i} + b\vec{j} \\ \frac{d\vec{B}}{dt} &= \frac{d}{dt}(c\sin\omega t)\vec{i} + \frac{d}{dt}(d\cos\omega t)\vec{j} = c\omega\cos\omega t\vec{i} - d\omega\sin\omega t\vec{j} \\ \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| &= \sqrt{(-kae^{-kt})^2 + b^2} \\ \left|\frac{d\vec{B}}{dt}\right| &= \sqrt{(c\omega\cos\omega t)^2 + (d\omega\sin\omega t)^2}\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
\left|\vec{A}\right| &= \sqrt{(ae^{-kt})^2 + (bt)^2 + 1} \\
\left|\vec{B}\right| &= \sqrt{(c\sin\omega t)^2 + (d\cos\omega t)^2} \\
\frac{d}{dt}\left|\vec{A}\right| &= \frac{d}{dt}\sqrt{(ae^{-kt})^2 + (bt)^2 + 1} = \frac{-a^2e^{2(-kt)}k + b^2t}{\sqrt{a^2e^{2(-kt)} + b^2t^2 + 1}} \\
\frac{d}{dt}\left|\vec{B}\right| &= \frac{d}{dt}\sqrt{(c\sin\omega t)^2 + (d\cos\omega t)^2} = \frac{\omega}{2}\frac{c^2 - d^2}{\sqrt{c^2\sin^2\omega t + d^2\cos^2\omega t}}
\end{aligned}$$

După cum se constată:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| &\neq \frac{d}{dt}\left|\vec{A}\right| \\
\left|\frac{d\vec{B}}{dt}\right| &\neq \frac{d}{dt}\left|\vec{B}\right|
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) &= \frac{d}{dt}(ae^{-kt}c\sin\omega t + btd\cos\omega t) \\
&= (ake^{-kt}c + btd\omega)\sin\omega t + (\omega ae^{-kt}c + bd)\cos\omega t
\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ae^{-kt} & bt & 1 \\ c\sin\omega t & d\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} \\
&= \omega d\,(\sin\omega t)\,\vec{i} + c\,(\cos\omega t)\,\omega\vec{j} - \\
&- (ake^{-kt}d\cos\omega t + ae^{-kt}d\omega\sin\omega t \\
&+ c\omega\cos\omega t bt + cb\sin\omega t)\vec{k}
\end{aligned}$$

1.3 Calculaţi mărimea gradientul funcţiei:

$$f(x, y, z) = xy^2 + yx^2 + xyz$$

Rezolvare:

Conform definiţiei operatorului gradient, se obţine:

$$grad f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Derivatele parţiale ale funcţiei scalare f în raport cu cele trei coordonate sunt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 + yx^2 + xyz) = y^2 + 2yx + yz \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + yx^2 + xyz) = 2yx + x^2 + xz \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 + yx^2 + xyz) = yx
\end{aligned}$$

Ca urmare mărimea vectorului gradient este:

$$|\nabla f| = \sqrt{(y^2 + 2yx + yz)^2 + (2yx + x^2 + xz)^2 + (yx)^2}$$

1.4 Calculaţi divergenţa vectorului:

$$\vec{A} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} + 4y\vec{k}$$

Rezolvare:

Conform definiţiei operatorului divergenţă, se obţine:

$$\begin{aligned} div\vec{r} &= \nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(2) + \frac{\partial}{\partial z}(4y) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Rezultatul aplicării operatorului divergenţă unei mărimi vectoriale este un scalar.

1.5 Determinaţi rotorul funcţiei vectoriale:

$$\vec{F} = (4abyz^2 - 10bx^2y^2)\vec{i} + (9abxz^2 - 6bx^3y)\vec{j} + 8abxyz\vec{k}$$

unde $a, b, c-$constante.

Rezolvare:

Conform definiţiei operatorului divergenţă, se obţine:

$$\begin{aligned} rot\vec{F} &= \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4abyz^2 - 10bx^2y^2 & 9abxz^2 - 6bx^3y & 8abxyz \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(8abxyz) - \frac{\partial}{\partial z}(9abxz^2 - 6bx^3y)\right] \\ &\quad -\vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(8abxyz) - \frac{\partial}{\partial z}(4abyz^2 - 10bx^2y^2)\right] \\ &\quad +\vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(9abxz^2 - 6bx^3y) - \frac{\partial}{\partial y}(4abyz^2 - 10bx^2y^2)\right] \\ &= -10abxz\vec{i} + (5abz^2 + 2bx^2y)\vec{k} \end{aligned}$$

Capitolul 2

Mecanica clasică

2.1 Cinematica punctului material

Cinematica studiază deplasările corpurilor în funcţie de timp, fără a ţine cont de cauza care produce mişcarea. Deplasarea unui corp faţă de alte corpuri se raportează la un **sistem de referinţă** solidar legat de corpurile alese drept repere.

Un principiu fundamental al Mecanicii newtoniene este *principiul caracterului absolut al măsurii timpului*, adică măsura timpului este independentă de sistemul de referinţă ales, faţă de care se studiază mişcarea corpului. Cu alte cuvinte, dacă avem două fenomene care sunt simultane faţă de un sistem de referinţă, ele vor fi simultane faţă de orice alt sistem de referinţă; deci, simultaneitatea a două fenomene are un caracter absolut în Menanica newtoniană.

În Mecanică, un corp ale cărui dimensiuni pot fi neglijate în cursul mişcării sale, se numeşte **punct material** sau **particulă** şi se

reprezintă grafic printr-un punct geometric.

Fie un punct material care se deplasează în timp; alegem ca sistem de referinţă sistemul cartezian $(Oxyz)$. Coordonatele x, y şi z ale punctului material şi respectiv vectorul de poziţie $\vec{r}$ sunt funcţii de timp:

$$\vec{r}(t): \quad x(t) \quad y(t) \quad z(t) \tag{2.1}$$

Funcţia $\vec{r}(t)$ se numeşte **legea de mişcare** a punctului material. Totalitatea poziţiilor succesive ale punctului material în timp formează o curbă numită **tratectoria** particulei şi este caracterizată prin **ecuaţiile parametrice**:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{2.2}$$

Mărimile cinematice care caracterizează mişcarea unui punct material sunt viteza şi acceleraţia. Se defineşte **viteza medie** ca fiind variaţia vectorului deplasare raportată la intervalul de timp cât are loc deplasarea:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r'} - \vec{r}}{t' - t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} \tag{2.3}$$

şi respectiv **viteza momentană**:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} \tag{2.4}$$

Observaţie: vom folosi în continuare notaţia Leibnitz pentru derivata în raport cu timpul a unei mărimi, adică cu un punct deasupra pentru derivata de ordin întâi şi respectiv cu două puncte pentru derivata de ordin doi.

Deci, viteza particulei este derivata în raport cu timpul a vectorului de poziţie:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \tag{2.5}$$

şi are componentele:

$$\dot{\vec{r}}: \quad \dot{x}(t) \quad \dot{y}(t) \quad \dot{z}(t) \tag{2.6}$$

iar **acceleraţia** este derivata vitezei în raport cu timpul:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \tag{2.7}$$

şi are componentele:

$$\ddot{\vec{r}}: \quad \ddot{x}(t) \quad \ddot{y}(t) \quad \ddot{z}(t) \tag{2.8}$$

Fie două sisteme de referinţă S şi S' (Fig.1), care se mişcă *arbitrar* unul faţă de celălalt. Fie un punct material P aflat în mişcare faţă de cele două sisteme de referinţă. Mărimile cinematice similare faţă de cele două sisteme vor fi notate cu aceleaşi litere, fără şi respectiv cu accent. Între vectorii de poziţie ai particulei, $\vec{r}$ (faţă de S) şi $\vec{r}'$ (faţă de S') este verificată relaţia evidentă:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}' \tag{2.9}$$

unde

$$\vec{r}' = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z \tag{2.10}$$

iar $\vec{e}'_x$, $\vec{e}'_y$ şi $\vec{e}'_z$ reprezintă versorii axelor de coordonate ale sistemului S', *dependenţi de timp*. Vom deriva relaţia (2.1.9) în raport cu timpul:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_o + x'\dot{\vec{e}}'_x + y'\dot{\vec{e}}'_y + z'\dot{\vec{e}}'_z + \dot{x}'\vec{e}'_x + \dot{y}'\vec{e}'_y + \dot{z}'\vec{e}'_z \tag{2.11}$$

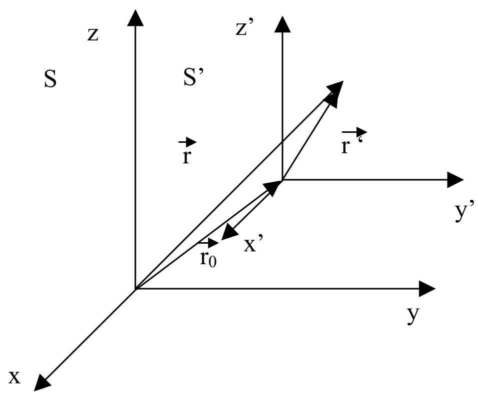


Fig.1

În membrul stâng al identităţii (2.1.11) vectorul $\dot{\vec{r}}$ reprezintă viteza particulei faţă de sistemul de referinţă fix S, şi este numită convenţional **viteză absolută**. În membrul drept, suma primilor patru termeni reprezintă viteza particulei dacă ea ar fi imobilă faţă de sistemul S', se numeţe **viteză de transport** a particulei şi ea este nulă dacă sistemul S' nu se mişă faţă de S. Suma ultimilor trei termeni din membrul drept reprezintă viteza particulei faţă de sistemul mobil S' şi se numeşte **viteză relativă**. Aşadar, relaţia (2.1.11) se poate scrie sub forma:

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{transp} + \vec{v}_{rel} \tag{2.12}$$

unde

$$\vec{v}_{abs} = \dot{\vec{r}} \tag{2.13}$$

$$\vec{v}_{transp} = \dot{\vec{r}}_o + x'\dot{\vec{e}}'_x + y'\dot{\vec{e}}'_y + z'\dot{\vec{e}}'_z \tag{2.14}$$

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}'\vec{e}'_x + \dot{y}'\vec{e}'_y + \dot{z}'\vec{e}'_z \tag{2.15}$$

Observaţie: viteza de transport a particulei se compune din viteza $\dot{\vec{r}}_o$ a originii sistemului mobil S' şi din **viteza de rotaţie** $\vec{\omega} \times \vec{r}' = x'\dot{\vec{e}}'_x + y'\dot{\vec{e}}'_y + z'\dot{\vec{e}}'_z$ a particulei solidar legate de S', în jurul punctului O', presupus fix. Relaţia (2.1.12) se numeşte **formula de compunere a vitezelor în Cinematica newtoniană**.

Vom deriva încă o dată, în raport cu timpul, identitatea (2.1.11):

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_o + x'\ddot{\vec{e}}'_x + y'\ddot{\vec{e}}'_y + z'\ddot{\vec{e}}'_z + \\ \ddot{x}'\vec{e}'_x + \ddot{y}'\vec{e}'_y + \ddot{z}'\vec{e}'_z + \\ 2(\dot{x}'\dot{\vec{e}}'_x + \dot{y}'\dot{\vec{e}}'_y + \dot{z}'\dot{\vec{e}}'_z)\end{aligned} \tag{2.16}$$

În membrul stâng al identităţii (2.1.16) vectorul $\ddot{\vec{r}}$ reprezintă acceleraţia particulei faţă de sistemul de referinţă fix S, numită

acceleraţie absolută. În membrul drept, suma primilor patru termeni reprezintă acceleraţia particulei dacă aceasta ar fi solidar legată de sistemul mobil S' şi se numeşte **acceleraţie de transport**. Suma următorilor trei termeni reprezintă acceleraţia particulei faţă de sistemul mobil S' şi se numeşte **acceleraţie relativă**, iar suma ultimilor trei termeni se numeşte **acceleraţie complementară** sau **acceleraţie Coriolis**. Cu notaţiile:

$$\vec{a}_{abs} = \ddot{\vec{r}} \tag{2.17}$$

$$\vec{a}_{transp} = \ddot{\vec{r}}_o + x'\ddot{\vec{e}}'_x + y'\ddot{\vec{e}}'_y + z'\ddot{\vec{e}}'_z \tag{2.18}$$

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{x}'\vec{e}'_x + \ddot{y}'\vec{e}'_y + \ddot{z}'\vec{e}'_z \tag{2.19}$$

$$\vec{a}_{compl} = 2(\dot{x}'\dot{\vec{e}}'_x + \dot{y}'\dot{\vec{e}}'_y + \dot{z}'\dot{\vec{e}}'_z) \tag{2.20}$$

relaţia (2.16) se poate scrie sub forma:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{transp} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{compl} \tag{2.21}$$

ceea ce reprezintă **formula de compunere a acceleraţiilor în Cinematica newtoniană**.

2.2 Transformările Galilei

În continuare, vom numi **particulă liberă** o particulă asupra căreia nu acţionează nici un alt corp. Experienţa arată că există sisteme de referinţă privilegiate pentru care este adevărată următoarea afirmaţie: orice particulă liberă se mişcă cu viteză constantă faţă de aceste sisteme, adică se deplasează rectiliniu şi uniform (principiul inerţiei). Sistemele de referinţă pentru care este valabilă această afirmaţie se numesc **sisteme inerţiale**.

Să studiem în continuare mişcarea unei particule libere faţă de

două sisteme de referinţă inerţiale S (fix) şi S' (mobil), deci care se mişcă cu viteză constantă atât faţă de S cât şi faţă de S', adică:

$$\vec{a}_{abs} = 0 \quad ; \quad \vec{a}_{rel} = 0 \tag{2.22}$$

Conform legii de compunere a acceleraţiilor pentru o particulă (2.1.21), va rezulta:

$$\vec{a}_{transp} + \vec{a}_{compl} = 0 \tag{2.23}$$

ceea ce va conduce la:

$$\ddot{\vec{r}}_o = 0 \quad ; \quad \ddot{\vec{e}}'_x = 0 \quad ; \quad \ddot{\vec{e}}'_y = 0 \quad ; \quad \ddot{\vec{e}}'_z = 0 \tag{2.24}$$

Cerinţele relaţiei (2.2.24) exprimă faptul că originea O' se deplasează rectiliniu şi uniform faţă de S, iar axele sistemului S' nu se rotesc în jurul originii O'. Mişcarea sistemului de referinţă, în decursul căreia axele rămân paralele cu ele însele se numeşte **mişcare de translaţie**. Deci, sistemul inerţial S' are o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă faţă de sistemul inerţial S.

Observaţie: pentru a menţine starea de mişcare rectilinie şi uniformă sau de repaus relativ a unei particule libere, faţă de un sistem de referinţă inerţial, spaţiul şi timpul în sistemul inerţial trebuie să satisfacă anumite caracteristici:
- spaţiul să fie *omogen*, adică toate punctele din spaţiu să fie echivalente
- spaţiul să fie *izotrop*, adică traiectoriile particulelor libere aflate în mişcare să fie rectilinii indiferent de direcţiile în care are loc mişcarea
- timpul să fie *uniform*, adică particulele libere să parcurgă spaţii egale în intervale egale de timp

Vom introduce noţiunea de **eveniment**, prin care se înţelege un fenomen produs într-un anumit punct geometric, la un anumit moment de timp. Un eveniment este caracterizat prin patru coordonate spaţio-temporale: trei coordonate spaţiale x, y şi z ale punctului unde are loc fenomenul şi o coordonată temporală t, desemnând momentul producerii lui. Noţiunea de eveniment va fi frecvent folosită mai ales în Cinematica relativistă.

Coordonatele spaţio-temporale $(\vec{r}, t)$ caracterizează mişcarea absolută, coordonatele spaţio-temporale $(\vec{r}', t)$ caracterizează mişcarea relativă, iar $\vec{r}_o$ caracterizează mişcarea de transport a sistemului S' faţă de S, S' aflându-se în mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $\vec{v}$ faţă de S.

Între coordonatele spaţio-temporale ale unui eveniment faţă de cele două sisteme de referinţă există relaţia evidentă:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}' \tag{2.25}$$

unde $\vec{r}_o = vt'$ reprezintă ecuaţia ce caracterizează mişcarea uniformă a sistemului S' faţă de S. Conform principiului fundamental al Mecanicii newtoniene al caracterului absolut al măsurii timpului, timpul se scurge la fel în ambele sisteme de referinţă, adică:

$$t = t' \tag{2.26}$$

Relaţiile (2.2.25) şi (2.2.26) reprezintă **transformările Galilei** care exprimă coordonatele spaţio-temporale ale unui eveniment faţă de un sistem de referinţă inerţial în funcţie de coordonatele spaţio-temporale ale aceluiaşi eveniment faţă de un alt sistem de referinţă inerţial aflat în mişcare rectilinie şi uniformă faţă de primul, în Mecanica newtoniană. Pentru cazul particular în care

$\vec{v}||Ox$ vom obţine **transformările Galilei speciale directe**:

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{2.27}$$

şi respectiv **transformările Galilei speciale inverse**:

$$\begin{aligned} x &= x' + v\,t' \\ y &= = y' \\ z &= z' \\ t &= = t' \end{aligned} \tag{2.28}$$

Consecinţele transformărilor Galilei (speciale) se referă la:

• legea de compunere a vitezelor în Mecanica newtoniană, adică:

$$v_{rel} = v_{abs} - v \tag{2.29}$$

• invarianţa lungimilor în orice sistem de referinţă inerţial, adică:

$$l' = l \tag{2.30}$$

unde l' reprezintă lungimea unei bare măsurată în sistemul S' iar l reprezintă lungimea aceleaşi bare măsurată în sistemul S.

Observaţie: Transformările Galilei speciale au avantajul că au o formă foarte simplă şi conţin caracteristica esenţială a relaţiei dintre sistemele de referinţă inerţiale S şi S', anume că ele au unul faţă de celălalt o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă.

2.3 Principiile dinamicii newtoniene

Dinamica studiază mişcarea corpurilor plecând de la cauza care o produce. Principiile Dinamicii sunt propoziţii cu caracter general, obţinute pe baza a numeroase date experimentale.

Principiul inerţiei (legea întâi a lui Newton) afirmă că orice particulă, în absenţa acţiunii altor corpuri, se mişcă rectiliniu şi uniform; deci, o particulă liberă se deplasează cu viteză constantă. Principiul inerţiei este verificat prin contrazicere, adică nu s-a observat experimental că, dacă este îndeplinită condiţia din principiu mişcarea să nu tindă la una rectilinie.

Observaţie: apare noţiunea de **inerţie** care reprezintă tendinţa unui corp de a nu-şi modifica viteza în cazul când nu există acţiuni exterioare.

Principiul manifestării acţiunii (legea a doua a lui Newton) afirmă că, în condiţii exterioare date, produsul dintre masa şi acceleraţia unei particule este o funcţie vectorială ce depinde de poziţia particulei, viteza sa şi de timp:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \tag{2.31}$$

Observaţii:

1. Apare noţiunea de **masă**; prin experienţe de ciocnire se demonstrează că fiecare particulă este caracterizată de o mărime scalară pozitivă, specifică şi invariantă (în Mecanica newtoniană) care reprezintă masa particulei.
2. Funcţia vectorială $\vec{F}$ reprezintă forţa cu care corpurile acţionează asupra particulei, iar dependenţa $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ se numeşte

legea forţei sau **expresia forţei**. Forţa $\vec{F}$ este o mărime vectorială măsurabilă al cărui modul exprimă intensitatea acţiunii asupra particulei, iar direcţia şi sensul ei redau orientarea acţiunii
3. Principiul doi stabileşte dependenţa generală a forţei de variabilele cinematice $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ şi t, dar nu dă o prescripţie pentru forma concretă a acestei dependenţe.
4. Relaţia (2.3.31) reprezintă **ecuaţia fundamentală a Dinamicii**

Principiul independenţei acţiunilor afirmă că exercitarea simultană a mai multor acţiuni asupra unei particule nu modifică legile forţelor; efectul asupra particulei este exprimat prin suma forţelor individuale:

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \sum_n \vec{F}_n(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \tag{2.32}$$

Principiul acţiunii şi reacţiunii (legea a treia a lui Newton) afirmă că două corpuri acţionează unul asupra celuilalt în aşa fel încât forţele corespunzătoare sunt egale ca mărime şi de sens contrar:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{2.33}$$

unde $\vec{F}_{12}$ reprezintă **acţiunea** corpului 1 asupra corpului 2, iar $\vec{F}_{21}$ reprezintă **reacţiunea** corpului 2 asupra corpului 1.

Principiul relativităţii a lui Galilei afirmă că, pornind de la situaţii iniţiale similare, evoluţia unui ansamblu de particule izolat (nu acţionează nici o forţă din exterior asupra ansamblului) este aceeaşi în orice sistem de referinţă inerţial.
O consecinţă deosebit de importantă a acestui principiu se obţine exprimând legea a doua a lui Newton pentru o particulă care

face parte dintr-un ansamblu izolat, faţă de sistemele inerţiale S şi S':

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \quad \text{faţă de S} \\ m\ddot{\vec{r'}} &= \vec{F}(\vec{r'},\dot{\vec{r'}},t') \quad \text{faţă de S'} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Se observă că legea forţei este aceeaşi în ambele sisteme de referinţă, conform principiului relativităţii a lui Galilei. Legătura dintre sistemele inerţiale este dată de transformarea Galilei (2.2.25), care derivată de două ori conduce la relaţia:

$$\ddot{\vec{r'}} = \ddot{\vec{r}} \tag{2.35}$$

adică acceleraţiile particulei în sistemul S şi S' sunt identice. Conform relaţiei (2.3.34) rezultă:

$$\vec{F}(\vec{r'},\dot{\vec{r'}},t) = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \tag{2.36}$$

Folosind relaţiile de transformare Galilei, egalitatea (2.3.36) devine:

$$\vec{F}(\vec{r}-\vec{v}\,t,\dot{\vec{r}}-\vec{v},t) \equiv \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \tag{2.37}$$

identitate ce exprimă **invarianţa expresiei forţei** exercitate asupra unei particule dintr-un ansamblu izolat, la schimbarea sistemului de referinţă inerţial. Cu alte cuvinte, dacă avem la dispoziţie o mulţime infinită de sisteme de referinţă inerţiale, conform principiului relativităţii a lui Galilei nici unul din aceste sisteme nu este privilegiat în descrierea mişcării unei particule libere şi toate principiile Mecanicii au aceeaşi formă faţă de orice sistem de referinţă inerţial.

În concluzie, Dinamica studiază mişcarea corpurilor pornind de la expresiile, presupuse cunoscute, ale forţelor exercitate asupra lor. Bazându-ne pe principii, să vedem cum se formulează concret problemele Dinamicii.

Fie un punct material de masă m solicitat de forţa $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ ce reprezintă o acţiune exterioară cunoscută. Problema de dinamică constă în determinarea mişcării particulei, iar rezolvarea ei se face cu ajutorul ecuaţiei diferenţiale vectoriale (2.3.31) pentru vectorul de poziţie $\vec{r}$ al particulei, ca funcţie de timp. Această ecuaţie vectorială, scrisă pe componente revine la un sistem de trei ecuaţii diferenţiale de ordin doi, în formă normală, pentru funcţiile $x(t)$, $y(t)$ şi $z(t)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Acestui sistem de ecuaţii diferenţiale i se asocoază **condiţiile iniţiale**:

$$\begin{array}{rr} x(t_o) = x_o & \dot{x}(t_o) = v_{ox} \\ y(t_o) = y_o & \dot{y}(t_o) = v_{oy} \\ z(t_o) = z_o & \dot{z}(t_o) = v_{oz} \end{array} \tag{2.39}$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (2.3.38) impreună cu condiţiile iniţiale (2.3.39) formează o **problemă Cauchy** care ne oferă, conform matematicii, o soluţie unică şi care este:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \tag{2.40}$$

obţinându-se **legea de mişcare** a particulei:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{2.41}$$

determinată de condiţiile iniţiale:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_o) &= \vec{r}_o \\ \dot{\vec{r}}(t_o) &= \vec{v}_o \end{aligned} \tag{2.42}$$

Numim **stare mecanică** la momentul t a unui punct material, ansamblul $\{\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)\}$ format din vectorul său de poziţie şi viteza sa în acel moment. Condiţiile iniţiale (2.3.42) definesc starea mecanică a particulei la momentul t_o.

Deci, în ipoteza că expresia forţei este cunoscută, starea mecanică a unei particule la un moment dat **determină univoc** legea ei de de mişcare. Principial este suficient să cunoaştem starea mecanică la un moment t_o pentru a deduce, fără nici o ambiguitate, starea mecanică a particulei la orice alt moment. Legea de mişcare poate fi găsită efectiv prin integrarea ecuaţiei diferenţiale (2.3.31), care se numeşte **ecuaţia de mişcare** a particulei.

Observaţie: până acum s-a discutat modul în care legile lui Newton guvernează mişcarea punctelor materiale în sistemele de referinţă inerţiale. Este necesar să facem câteva consideraţii de dinamică privind **sistemele de referinţă neinerţiale** (sisteme pentru care nu mai este valabil principiul inerţiei). Faţă de sistemele neinerţiale, legea a doua a lui Newton are un enunţ similar aceluia faţă de sistemele inerţiale, cu deosebirea majoră că forţei care descrie acţiunea fizică a altor corpuri asupra particulei trebuie să i se adauge **forţele de inerţie**, anume forţa de transport

şi forţa Coriolis. Celelalte legi ale lui Newton (principiul inerţiei, independenţei acţiunilor, acţiunii şi reacţiunii) rămân neschimbate în ce priveşte traducerea proprietăţilor acţiunilor fizice prin însuşiri ale legilor forţelor.
Remarcăm că, în general, ecuaţia de mişcare a unei particule într-un sistem de referinţă neinerţial este considerabil mai complicată decât ecuaţia de mişcare scrisă faţă de un sistem inerţial. În consecinţă, legea de mişcare a particulei este mai greu de calculat. Deşi aceste consideraţii arată că sistemele inerţiale sunt privilegiate, totuşi în multe cazuri sunt folosite sistemele de referinţă neinerţiale.

2.4 Interacţiile fundamentale

Cele cinci principii ale Dinamicii, împreună cu principiul caracterului absolut al măsurii timpului alcătuiesc sistemul de principii fizice fundamentale, pornind de la care se dezvoltă logic întreaga Mecanică newtoniană. Principiile Mecanicii newtoniene sunt conforme cu realitatea pentru un domeniu foarte intins de mişcări ale corpurilor. Domeniile în care ele încetează sa fie valabile sunt:

- mişcările corpurilor cu viteze apropiate de viteza luminii, care sunt descrise corect pe baza principiilor Teoriei relativităţii
- mişcările particulelor la scară atomică şi nucleară a căror descriere este guvernată de principiile Mecanicii cuantice

În afară de informaţia fizică generală conţinută în principii, în Mecanica newtoniană se mai introduce informaţia fizică sub forma legilor de forţă ale interacţiilor care apar în diferite probleme concrete. Forţele din Mecanică corespund unor interacţii fizice com-

plexe, dar oricât de complexe ar fi există o anumită suprapunere de **interacţiuni fundamentale**.
În prezent, se cunosc patru clase de interacţiuni fundamentale pe care le vom enumera în ordinea intensităţii crescânde.

Interactiunile gravitaţionale sunt cele mai slabe, dar cele mai generale: orice pereche de corpuri care au mase interacţionează gravitaţional. Legea de forţă a acestei interacţiuni a fost dedusă de Newton (1687). Forţa gravitaţională dintre două particule este atractivă, proporţională cu produsul maselor şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre particule:

$$\vec{F}_{grav} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{2.43}$$

cunoscută sub numele de **legea gravitaţiei universale**. Γ este **constanta gravitaţională universală** şi a fost determinată experimental, cu precizie, de către Cavendish (1798):
$\Gamma = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$.

Observaţii:

• mişcarea corpurilor cereşti este determinată în principal de interacţiunea lor gravitaţională şi deci este guvernată de legea gravitaţională universală (2.4.43)
• la scară terestră, prezintă importanţă atracţia gravitaţională a Pamântului asupra oricărui alt corp; forţa corespunzătoare, în vecinătatea suprafeţei terestre se numeşte **greutatea** corpurilor; interacţiunea gravitaţinală a corpurilor la suprafaţa Pământului este complet neglijabilă faţă de celelalte interacţiuni ale lor.

Interacţiunile electromagnetice sunt mult mai puternice decât cele gravitaţionale , dar se manifestă numai între particulele

care posedă **sarcină electrică**. Legea de forţă a interacţiunii electromagnetice dintre două corpuri încărcate nemişcate a fost stabilită de Coulomb (1785). **Forţa coulombiană** dintre două particule încărcate este proporţională cu produsul sarcinilor q_1 şi q_2 ale particulelor, invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele şi este atractivă sau repulsivă, după cum sarcinile au semne contrare sau au acelaşi semn:

$$\vec{F}_{Coulomb} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{2.44}$$

Factorul de proporţionalitate k este pozitiv, iar valoarea lui rezultă din alegerea unităţilor de măsură:

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 8.99\ 10^9\ Nm^2C^{-2} \tag{2.45}$$

O particulă cu sarcina q aflată în mişcare cu viteza $\vec{v}$ într-un câmp electromagnetic extern, este supusă **forţei Lorentz**:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{2.46}$$

unde $\vec{E}$ este intensitatea câmpului electric iar $\vec{B}$ este inducţia câmpului magnetic la un moment dat şi în punctul în care se găseşte particula în acel moment.

Observaţie: majoritatea fenomenelor din natură sunt datorate interacţiunilor electromagnetice; astfel, structura stabilă a atomilor şi moleculelor, coeziunea corpurilor, frecările, reacţiile chimice, procese biologice constituie exemple ale suprapunerii tot mai complexe a interacţiilor electromagnetice.

Teoria sistematică a interacţiunilor electromagnetice şi a efectelor lor macroscopice este studiată de Electrodinamica clasică, iar

studiul aprofundat al interacţiunilor electromagnetice pure dintre particulele elementare formează obiectul Electrodinamicii cuantice.

Interacţiunile slabe şi tari se manifestă numai la scară nucleară, la distanţe cel mult de ordinul 10^{-15} m. Interacţiunile slabe sunt cele care produc reacţii de tipul emisiei β a unor nuclee radioactive; aceste interacţii au o intensitate de 10^9 ori mai mică decât aceea a celor electromagnetice. Interacţiunile tari leagă strâns protonii şi neutronii în nucleele atomice, asigurând stabilitatea nucleelor. Interacţiunile tari sunt de circa 10^3 ori mai intense decât cele electromagnetice.

2.5 Teoremele generale ale Mecanicii pentru un punct material

Teoremele generale ale Mecanicii sunt consecinţele principiilor Dinamicii, care înlesnesc abordarea problemei mişcării unei particule sau sistem de particule. Vom considera în continuare un punct material de masă m şi solicitat de forţa $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, dată într-un sistem de referinţă inerţial S.

2.5.1 Teorema impulsului

Se numeşte **impuls** al unei particule, produsul dintre masa m şi viteza $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ a particulei. Impulsul se notează cu $\vec{p}$ iar unitatea de măsură în sistemul internaţional de unităţi este $[p]_{SI} = kg\ m/s$ sau $N \cdot s$:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.47}$$

Dacă vom deriva în raport cu timpul relaţia de definiţie (2.5.47) vom obţine:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{2.48}$$

Această formulă ne arată că derivata în raport cu timpul a impulsului este egală cu forţa totală exercitată asupra particulei şi reprezintă **teorema impulsului** pentru un punct material. Acest rezultat nu este decât o definiţie alternativă a forţei, care foloseşte noţiunea de impuls, cele două definiţii:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned} \tag{2.49}$$

fiind echivalente atunci când masa este constantă.

O consecinţă imediată a formulei (2.5.48) se referă la cazul când forţa totală care acţionează asupra particulei este nulă; atunci şi numai atunci, impulsul total al particulei se conservă în timp:

$$\vec{F} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{p}(t) \equiv \vec{p}(t_o) \tag{2.50}$$

Această concluzie este numită **legea de conservare a impulsului**. Din punct de vedere matematic, componentele constante p_x, p_y şi p_z ale impulsului particulei libere sunt **integrale prime** ale ecuaţiei de mişcare (2.3.31), adică integrale prime ale sistemului de ecuaţii diferenţiale (2.3.38).

2.5.2 Teorema momentului cinetic

Momentul impulsului sau **momentul cinetic (orbital)** al unei particule este definit ca produsul vectorial dintre vectorul de poziţie $\vec{r}$ şi impulsul $\vec{p}$ al particulei:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad [l]_{SI} = J \cdot s \tag{2.51}$$

Vom calcula în continuare derivata în raport cu timpul a momentului cinetic folosindu-ne şi de formula (2.5.48):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} + m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \vec{M} \\ \rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} &= \vec{M} \end{aligned} \tag{2.52}$$

unde $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ reprezintă **momentul forţei**. Relaţia (2.5.52) exprimă **teorema momentului cinetic**: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unei particule este egală cu momentul forţei exercitate asupra particulei.

O consecinţă a teoremei momentului cinetic se referă la cazul când momentul forţei totale care acţionează asupra particulei este nul; atunci şi numai atunci, momentul cinetic al particulei se conservă în timp:

$$\vec{M} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{l}(t) \equiv \vec{l}(t_o) \tag{2.53}$$

Acest rezultat se numeşte **teorema de conservare a momentului cinetic**. Componentele constante l_x, l_y şi l_z ale momentului cinetic sunt integrale prime ele ecuaţiei de mişcare (2.3.31) şi sunt complet determinate de starea mecanică a particulei la momentul t_o.

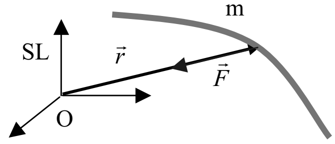


Fig. 2*

Observaţie: momentul forţei totale ce acţionează asupra unei particule poate fi nul în următoarele cazuri:

• $\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{M} = \vec{0} \rightarrow \vec{l} = const.$
• $\vec{F} \neq \vec{0}$; acest lucru se întâmplă atunci când forţa este o **forţă centrală**, adică direcţia forţei ce acţionează asupra particulei trece printr-un punct fix dat numit **centru de forţă Fig. 2***.

Expresia unei forţe centrale este:

$$\vec{F} = f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r} \tag{2.54}$$

deci are direcţia vectorului de poziţie. Momentul acestei forţe centrale va fi:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r} = \vec{0}$$
$$\rightarrow \vec{l} = const. \tag{2.55}$$

2.5.3 Teorema energiei cinetice

Energia cinetică este o mărime scalară nenegativă definită prin semiprodusul dintre masa şi pătratul vitezei particulei:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\vec{v} \tag{2.56}$$

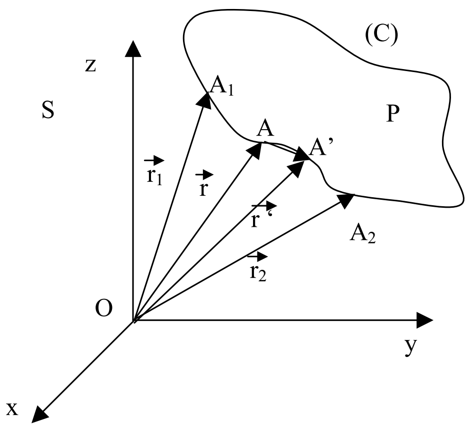


Fig.2

Fie o porţiune din traiectoria unei particule cuprinsă între punctele A_1 şi A_2 (Fig.2) în care particula se găseşte la momentele t_1 şi respectiv t_2. În intervalul de timp elementar dt, particula parcurge arcul AA' având vectorul deplasare:

$$\vec{AA'} = d\vec{r} = \vec{v}dt \tag{2.57}$$

Fie $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ forţa ce acţionează asupra particulei în punctul A. Produsul scalar:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F|\vec{r}|\cos\theta \qquad (2.58)$$

se numeşte **lucrul mecanic elementar** al forţei $\vec{F}$ corespunzător deplasării elementare $d\vec{r}$ a particulei. Unghiul θ este unghiul dintre forţă şi direcţia deplasării. Semnificaţia liniuţei transversale de pe litera d în ecuaţia (2.5.58) este că expresia diferenţială dL nu este în general diferenţială totală a vreunei funcţii de poziţia particulei.

Observaţii:

• dacă forţa este perpendiculară pe direcţia deplasării ($\vec{F} \perp d\vec{r}$) atunci lucrul mecanic elementar este nul
• dacă forţa nu este perpendiculară pe direcţia deplasării, atunci lucrul mecanic elementar poate fi pozitiv şi se numeşte **lucrul mecanic primit** de particulă sau **lucrul mecanic motor**, sau poate fi negativ şi atunci se numeşte **lucrul mecanic cedat** de particulă sau **lucrul mecanic rezistent**
• lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ în unitatea de timp este numit **puterea** forţei $\vec{F}$ care se exercită asupra particulei, la momentul t:

$$\frac{dL}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (2.59)$$

Puterea poate fi pozitivă (**putere primită**), negativă (**putere cedată**) sau nulă.

Lucrul mecanic total corespunzător deplasării particulei în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ se numeşte **lucrul mecanic integral** şi este

definit prin relaţia:

$$L[t_1, t_2] \equiv \int_{A_1}^{A_2} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{r} \qquad (2.60)$$

Dacă vom utiliza în continuare legea de mişcare a particulei $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vom putea transforma integrala (2.5.60) într-o integrală după timp (integrală Riemann):

$$L[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t), \vec{v}(t), t]\vec{v}(t)dt \qquad (2.61)$$

Vom deriva în continuare energia cinetică a particulei în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\vec{v}\vec{v}) = \frac{1}{2}m[\vec{v}\dot{\vec{v}} + \dot{\vec{v}}\vec{v}] = m\vec{v}\dot{\vec{v}} = \vec{v}\vec{F} = \frac{dL}{dt} \\ \rightarrow \frac{dE_c}{dt} &= \frac{dL}{dt} \Rightarrow dE_c = dL \end{aligned} \qquad (2.62)$$

Relaţia (1.5.62) arată că derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unei particule este egală cu puterea forţei exercitate asupra particulei, sau variaţia energiei cinetice a particulei într-un interval infinitezimal dt este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat în acest interval de timp de forţa exercitată asupra particulei. Afirmaţiile de mai sus sunt enunţuri echivalente ale **teoremei energiei cinetice**, în **forma diferenţială**. **Forma integrală** a acestei teoreme se exprimă prin relaţia:

$$\begin{aligned} E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t), \vec{v}(t), t]\vec{v}(t)dt \\ \rightarrow E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) &= L[t_1, t_2] \end{aligned} \qquad (2.63)$$

Deci, variaţia energiei cinetice a unei particule în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este egală cu lucrul integral al forţei exercitate asupra particulei.

2.5.4 Energia potenţială. Energia mecanică. Teorema de conservare a energiei mecanice

Fie cazul particular când forţa ce acţionează asupra particulei nu depinde decât de poziţia particulei (nu şi explicit de timp), deci particula se mişcă sub acţiunea unui **câmp de forţe static**:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) \tag{2.64}$$

Vom considera de asemenea că lucrul mecanic al acestei forţe nu depinde de drumul urmat de particulă (câmpuri speciale de forţe). Din punct de vedere al Analizei matematice, condiţia necesară şi suficientă ca integrala curbilinie a unei funcţii vectoriale $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ (lucrul mecanic) să fie independentă de curba care uneşte două puncte date şi să depindă numai de aceste puncte, se poate exprima prin următoarele două afirmaţii echivalente:

• există o funcţie $U = U(\vec{r})$, determinată până la o constantă aditivă, care satisface identic egalităţile:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.65}$$

Totodată este adevărată relaţia:

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{F} d\vec{r} = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] \tag{2.66}$$

unde integrala curbilinie se ia pe un drum arbitrar

• Funcţiile $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$ şi $F_z(x,y,z)$ verifică identităţile:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \tag{2.67}$$

Proprietăţile (2.5.65) şi (2.5.67) scrise sub formă vectorială devin:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \tag{2.68}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \tag{2.69}$$

Dacă funcţia vectorială $\vec{F}(\vec{r})$, cu proprietatea (2.5.68) este un câmp de forţe, atunci mărimea $U(x,y,z)$ se numeşte **energia potenţială** a particulei în punctul de coordonate x, y, z şi este un câmp scalar.

Dacă câmpul de forţe $\vec{F}(\vec{r})$ derivă dintr-o energie potenţială $U(\vec{r})$, atunci lucrul mecanic elementar al forţei este diferenţiala totală a unei funcţii de coordonate:

$$\begin{aligned} dL &= \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz && (2.70) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial z} = -dU(x,y,z) \\ \rightarrow dL &= -dU && (2.71) \end{aligned}$$

Deoarece particula se mişcă, energia ei potenţială depinde de timp prin intermediul coordonatelor particulei. Prin împărţirea identităţii (2.5.70) la intervalul de timp dt, corespunzător deplasării $d\vec{r}$, se obţine expresia puterii forţei:

$$\vec{F}\vec{v} = -\frac{dU}{dt} \tag{2.72}$$

Dacă vom ţine cont acum de expresia matematică a teoremei energiei cinetice, vom obţine următorul rezultat:

$$\frac{d}{dt}(E_{cin} + U) = 0 \tag{2.73}$$
$$d(E_{cin} + U) = 0 \tag{2.74}$$

Suma dintre energia cinetică şi energia potenţială a particulei:

$$E \equiv E_{cin} + U \tag{2.75}$$

se numeşte **energia mecanică** a particulei. Relaţiile (2.5.72) şi (2.5.73) reprezintă **forma diferenţială** a **legii conservării energiei mecanice**, care se enunţă astfel: în cursul mişcării unei particule într-un câmp de forţe static al cărui lucru mecanic nu depinde de drumul urmat, energia mecanică a particulei nu variză în timp. **Forma integrală** a **legii conservării energiei** se obţine din relaţia (2.5.66) şi forma (2.5.63) a teoremei energiei cinetice:

$$\begin{aligned} E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) &= U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \\ \rightarrow (E_{cin} + U)_{t_2} &= (E_{cin} + U)_{t_1} \end{aligned} \tag{2.76}$$

În consecinţă, atunci când o particulă se mişcă într-un câmp de forţe static, derivat dintr-o energie potenţială se defineţe energia mecanică a particulei cu proprietatea esenţială că se conservă în timp. Mărimea conservată E este complet determinată de starea iniţială a particulei:

$$E[\vec{r}(t), \vec{v}(t)] \equiv E(\vec{r}_o, \vec{v}_o) = \frac{1}{2}m\vec{v}_o^2 + U(\vec{r}_o) \tag{2.77}$$

Observaţii

• din punct de vedere matematic, energia este o integrală primă a ecuaţiei de mişcare (2.1.31)
• se disting două feluri de forţe: forţe pentru care se poate formula legea conservării energiei, numite **forţe conservative** şi forţe care nu au această proprietate, numite **forţe neconservative**

2.6 Teoremele generale ale Mecanicii pentru un sistem de puncte materiale

Fie un sistem de N puncte materiale ($N > 1$) de mase $m_i(i = \overline{1, N})$ fiecare. Presupunem cunoscute toate forţele, exterioare şi interioare, exercitate asupra particulelor din ansamblul considerat.

Vom defini **centrul de masă** al sistemului de puncte materiale, ca fiind punctul geometric caracterizat de vectorul de poziţie (Fig. 3a):

$$\vec{R} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$\rightarrow \vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i \tag{2.78}$$

unde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ reprezintă **masa totală** a sistemului de puncte materiale.

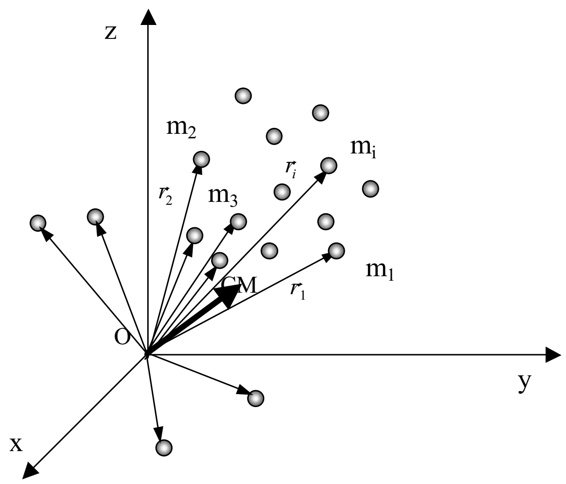


Fig. 3a

Observaţie: vectorul de poziţie $\vec{R}$ al centrului de masă este suma ponderată a vectorilor de poziţie ai tuturor particulelor din sistem, cu ponderi egale cu rapoartele dintre masele particulelor individuale şi masa totală a sistemului, $\frac{m_i}{M}$.

Vom defini **viteza centrului de masă** privit ca un punct fic-

tiv, ca fiind:

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \tag{2.79}$$

iar **acceleraţia centrului de masă**:

$$\dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{R}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \tag{2.80}$$

2.6.1 Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale

Prin definiţie, **impulsul $\vec{P}$ al sistemului de particule** este egal cu suma impulsurilor particulelor constituente:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \tag{2.81}$$

Vom nota în continuare prin $\vec{F}_{ext}$ ca fiind forţa totală exterioară ce acţionează asupra sistemului de particule şi care este egală cu suma forţelor exterioare $\vec{F}_{ext,i}$ ce acţionează asupra fiecărei particule, iar prin $\vec{F}_{int}$ - forţa totală interioară ce acţionează asupra sistemului de particule şi care este egală cu suma forţelor interioare $\vec{F}_{int,i}$ ce acţionează asupra fiecărei particule (Fig. 3b):

$$\vec{F}_{ext} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} \tag{2.82}$$

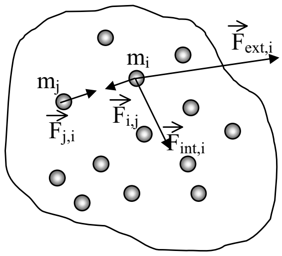


Fig. 3b

$$\vec{F}_{int} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{int,i} \tag{2.83}$$

Forţa care acţionează asupra fiecărei particule i a sistemului va fi:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{ext,i} + \vec{F}_{int,i} \tag{2.84}$$

iar ecuaţia de mişcare va fi, conform principiului doi al Mecanicii:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2....\dot{\vec{r}}_N; t) \quad (i = \overline{1, N}) \tag{2.85}$$

Scrise pe componente, cele N ecuaţii diferenţiale vectoriale (2.6.84) revin la un sistem de $3N$ ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, pentru componentele vectorilor de poziţie ai tuturor particulelor $\vec{r}_i$, ca funcţii de timp. Acestui sistem îi asociem următoarele

$6N$ condiţii iniţiale:

$$\vec{r}_i(t_o) = \vec{r}_{oi}$$
$$\dot{\vec{r}}_i(t_o) = \vec{v}_{oi} \qquad (2.86)$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (2.6.84) şi condiţiile iniţiale (2.6.85) alcătuiesc o problemă Cauchy care ne oferă o soluţie unică:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \qquad i = \overline{1, N} \qquad (2.87)$$

Această soluţie reprezintă **legea de mişcare a sistemului de particule** determinată de condiţiile iniţiale (2.6.85). Ansamblul vectorilor de poziţie ai tuturor particulelor la un moment dat t $\{\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), ...\vec{r}_N(t)\}$, defineşte **configuraţia sistemului** în momentul respectiv. Numărul parametrilor care determină complet configuraţia unui sistem de particule se numeşte **numărul gradelor de libertate** ale sistemului. În cazul sistemului analizat până acum, numărul gradelor de libertate este $3N$. Ansamblul vectorilor de poziţie şi vitezelor tuturor particulelor la momentul t, $\{\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), ..\vec{r}_N(t); \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2..\dot{\vec{r}}_N\}$ defineşte **starea mecanică a sistemului de puncte materiale** la momentul t. Prin urmare, condiţiile iniţiale (2.6.85) fixează starea mecanică la momentul t_o a sistemului, iar legea de mişcare (2.6.86) va reprezenta **evoluţia în timp** a configuraţiei sistemului de particule.

În continuare vom deriva, în raport cu timpul, relaţia (2.6.80):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &\equiv \dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{int,i} \\ &= \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} \end{aligned} \qquad (2.88)$$

Dar, în virtutea principiului independenţei acţiunilor şi a principiului acţiunii şi reacţiunii, rezultanta forţelor interioare este întotdeauna nulă, pentru un sistem de particule (forţele interioare acţionează asupra fiecărei perechi de particule si sunt egale şi de sens contrar). Ca urmare, relaţia (2.6.87) devine:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \tag{2.89}$$

ceea ce exprimă **teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale**: derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de particule este egală cu rezultanta tuturor forţelor exterioare exercitate asupra particulelor.

O consecinţă a acestei teoreme se referă la cazul în care rezultanta forţelor exterioare este nulă; atunci şi numai atunci, impulsul total al sistemului de particule se conservă:

$$\vec{F}_{ext} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{P}(t) \equiv \vec{P}(t_o) \tag{2.90}$$

Această ultimă relaţie exprimă **legea de conservare a impulsului total**. Din punct de vedere matematic, componentele P_x, P_y şi P_z sunt integrale prime ale ecuaţiilor diferenţiale (2.6.84) şi sunt complet determinate de starea mecanică la momentul t_o, (2.6.85) a ansamblului de puncte materiale. În particular, impulsul total al unui sistem de puncte materiale izolat este constant.

Din definiţiile (2.6.80) şi respectiv (2.6.78) rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{P} &\equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}} \\ \rightarrow M\dot{\vec{R}} &= \vec{P} \end{aligned} \tag{2.91}$$

Derivând în raport cu timpul relaţia (2.6.90) şi folosind teorema impulsului (2.6.88), obţinem:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext} \tag{2.92}$$

Relaţiile (2.6.90) şi (2.6.91) arată că impulsul centrului de masă al unui sistem de particule este impulsul total al sistemului, iar forţa asupra centrului de masă este rezultanta tuturor forţelor exterioare exercitate asupra particulelor din sistem. Dacă se presupune cunoscută forţa exterioară $\vec{F}_{ext}$, atunci ecuaţia (2.6.91) reprezintă ecuaţia de mişcare a centrului de masă şi poate fi integrată, specificându-se starea mecanică la momentul iniţial t_o:

$$\begin{aligned} \vec{R}(t_o) &= \vec{R}_o \\ \dot{\vec{R}}(t_o) &= \vec{V}_o \end{aligned} \tag{2.93}$$

2.6.2 Teorema momentului cinetic total pentru un sistem de puncte materiale

Momentul cinetic total $\vec{L}$ al sistemului de particule este suma momentelor cinetice individuale ale particulelor:

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i \tag{2.94}$$

Vom defini **momentul rezultant al forţelor exterioare**:

$$\vec{M}_{ext} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{ext,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i} \tag{2.95}$$

şi **momentul rezultant al forţelor interioare**:

$$\vec{M}_{int} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{int,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{int,i} \tag{2.96}$$

Derivăm în raport cu timpul relaţia (2.6.93):

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (\vec{F}_{ext,i} + \vec{F}_{int,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{int,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{ext,i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{int,i} \\
&= \vec{M}_{ext} + \vec{M}_{int} \\
\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}_{ext} + \vec{M}_{int} \qquad (2.97)
\end{aligned}$$

Formula (2.6.96) reprezintă **teorema momentului cinetic**: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total al unui sistem de puncte materiale este egală cu suma celor două momente rezultante, al forţelor exterioare şi al forţelor interioare.

O consecinţă a acestei teoreme se referă la cazul în care suma momentelor rezultante este nulă; atunci si numai atunci, momentul cinetic total se conservă:

$$\vec{M}_{ext} + \vec{M}_{int} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{L}(t) \equiv \vec{L}(t_o) \tag{2.98}$$

Observaţie

Definim un sistem de particule ca fiind un **sistem conservativ**

atunci când forţele de interacţiune între toate perechile de particule nu depind de vitezele relative ale acestora, adică au forma:

$$\vec{F}_{i,j}(\vec{r}_{i,j}) = f_{i,j}(r_{i,j})\frac{\vec{r}_{i,j}}{r_{i,j}} \tag{2.99}$$

unde $\vec{r}_{i,j} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ este vectorul poziţiei relative a particulelor i şi j. Deci, pentru un sistem conservativ de particule este valabilă egalitatea:

$$\vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i.j} = \vec{0} \tag{2.100}$$

Vom calcula acum momentul forţelor interioare pentru un sistem conservativ de particule:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{int} &= \sum_{i}^{N} \vec{M}_{int,i} = \sum_{i}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{int,i} = \sum_{i}^{N} \vec{r}_i \times \sum_{j,j\neq i} \vec{F}_{i,j} \\ &= \sum_{i,j} \vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i,j} = \sum_{i,j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i}) \\ &= \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i,j} = \sum_{i,j} \vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i,j} = \vec{0} \\ \rightarrow \vec{M}_{int} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{2.101}$$

Astfel, pentru un sistem conservativ de particule, mometul rezultant al forţelor interioare este întotdeauna nul. Ca urmare, legea momentului cinetic pentru un sistem conservativ este:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} \tag{2.102}$$

iar legea de conservare a momentului cinetic total va avea forma:

$$\vec{M}_{ext} \equiv \vec{0} \leftrightarrow \vec{L}(t) \equiv \vec{L}(t_o) \tag{2.103}$$

Componentele constante L_x, L_y şi L_z ale momentului cinetic total sunt integrale prime ale sistemului de ecuaţii de mişcare (2.6.84) şi sunt complet determinate de starea mecanică la mometul t_o (2.6.85).

2.6.3 Teorema energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale. Conservarea energiei mecanice

Energia cinetică totală pentru un sistem de puncte materiale este defintă ca suma energiilor cinetice individuale ale tuturor particulelor:

$$E_{cin} \equiv \sum_{i=1}^{N} E_{cin,i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \tag{2.104}$$

Lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare ale tuturor forţelor exterioare:

$$dL_{ext} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} \cdot d\vec{r}_i \tag{2.105}$$

iar **lucrul mecanic elementar al forţelor interioare** este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare ale tuturor forţelor interioare:

$$dL_{int} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{int,i} d\vec{r}_i \tag{2.106}$$

Diferenţiala energiei cinetice totale, plecând de la definiţia (2.6.103), va fi:

$$\begin{aligned} dE_{cin} &= \sum_{i=1}^{N} dE_{cin,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_{ext,i} + \vec{F}_{int,i} d\vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{int,i} d\vec{r}_i = dL_{ext} + dL_{int} \\ \rightarrow dE_{cin} &= dL_{ext} + dL_{int} \end{aligned} \tag{2.107}$$

ceea ce reprezintă **teorema energiei cinetice** pentru un sistem de particule, sub **formă diferenţială** adică, variaţia energiei cinetice totale a unui sistem de particule într-un interval de timp infinitezimal dt este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare efectuate de forţele exterioare şi de forţele interioare. Dacă se integrează expresia (2.6.106) se va obţine **forma integrală a teoremei energiei cinetice**:

$$E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1) = L_{ext}[t_1, t_2] + L_{int}[t_1, t_2] \tag{2.108}$$

unde $L_{ext}[t_1, t_2]$ şi respectiv $L_{int}[t_1, t_2]$ reprezintă lucrul mecanic integral al forţelor exterioare, respectiv interioare.

Vom considera în continuare un sistem de particule conservativ. Ţinând cont de expresia (2.6.98) a forţelor interioare, atunci lucrul mecanic elementar al forţelor interioare:

$$dL_{int} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{int,i} d\vec{r}_i = -d \sum_{i,j} U_{ij} \tag{2.109}$$

unde

$$U_{int} = \sum_{i,j} U_{ij}(r_{i,j}) \tag{2.110}$$

reprezintă **energia potenţială a forţelor interioare**. Astfel, lucrul mecanic elementar al forţelor interioare va fi:

$$dL_{int} = -dU_{int} \tag{2.111}$$

iar lucrul mecanic integral al forţelor interioare nu depinde decât de configuraţiile iniţială şi finală ale sistemului:

$$L_{int}[t_1, t_2] = -[U_{int}(t_2) - U_{int}(t_1)] \tag{2.112}$$

Dacă vom înlocui acest rezultat în expresia matematică teoremei energiei cinetice (2.6.106) vom obţine:

$$d(E_{cin} + U_{int}) = dL_{ext} \tag{2.113}$$

Suma dintre energia cinetică totală şi energia potenţială a forţelor interioare se numeşte **energia mecanică internă** a sistemului conservativ:

$$E_{int} = E_{cin} + U_{int} \tag{2.114}$$

În orice interval de timp în care lucrul mecanic al forţelor exterioare este identic nul şi numai atunci, energia internă a sistemului se conservă în timp:

$$L_{ext}[t_1, t_2] \equiv 0 \leftrightarrow E_{int}(t_o) \equiv E_{int}(t_1) \tag{2.115}$$

ceea ce reprezintă **teorema de conservare a energiei mecanice interne**.

Analog, dacă se analizează cazul în care asupra sistemului conservativ acţionează numai forţe exterioare conservative:

$$\vec{F}_{ext,i}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla} U_{ext,i}(\vec{r}_i) \tag{2.116}$$

atunci suma:

$$U_{ext}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} U_{ext,i}(\vec{r}_i) \tag{2.117}$$

reprezintă **energia potenţială a forţelor exterioare**. Lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare conservative este egal cu diferenţiala totală a energiei potenţiale a forţelor exterioare $-dU_{ext}$:

$$dL_{ext} = -dU_{ext} \tag{2.118}$$

Deci, lucrul mecanic integral al forţelor exterioare în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ depinde doar de configuraţiile iniţială şi finală ale sistemului conservativ:

$$L_{ext}[t_1, t_2] = -[U_{ext}(t_2) - U_{ext}(t_1)] \tag{2.119}$$

Pornind de la expresia (2.6.117), şi dacă vom ţine cont şi de teorema energiei mecanice interne (2.6.112) atunci vom obţine identitatea:

$$d(E_{cin} + U_{int} + U_{ext}) = 0 \tag{2.120}$$

Vom defini **energia potenţială totală** a sistemului suma dintre energia potenţială a forţelor exterioare şi energia potenţială a forţelor interioare:

$$U \equiv U_{int} + U_{ext} \tag{2.121}$$

iar suma dintre energia potenţială totală şi energia cinetică totală se numeşte **energia mecanică totală** a sistemului de puncte materiale:

$$E \equiv E_{cin} + U = E_{cin} + U_{int} + U_{ext} = E_{int} + U_{ext} \tag{2.122}$$

Relaţia (2.1.119) exprimă sub formă diferenţială **legea de conservare a energiei totale** pentru un sistem de particule conservativ, aflat într-un câmp de forţe exterioare conservative, adică:

$$E(t) \equiv E(t_o) \tag{2.123}$$

Energia totală este o integrală primă a sistemului ecuaţiilor de mişcare (2.6.84) şi este complet determinată de starea mecanică iniţială, la momentul t_o.

2.6.4 Teoremele lui König

Să analizăm în continuare cum se descompune mişcarea unui sistem de particule faţă de două sisteme de referinţă S şi S'. Fie un sistem de referinţă S' cu originea plasată în centrul de masă C al unui ansamblu de particule şi având o mişcare de translaţie faţă de sistemul de referinţă inerţial S (Fig.3).
Mişcarea ansamblului de particule în sistemul S se numeşte **mişcare absolută**, iar în sistemul S' se numeşte **mişcare relativă faţă de centrul de masă**. Pentru un punct material P (Fig.3) al sistemului de particule sunt adevărate relaţiile:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i' \tag{2.124}$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i' \tag{2.125}$$

Deoarece centrul de masă al sistemului de particule are faţă de sistemul de referinţă S' vectorul de poziţie $\vec{R}' = 0$, din relaţiile (2.6.77) şi (2.6.78) rezultă:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' = \vec{0} \tag{2.126}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = \vec{0} \tag{2.127}$$

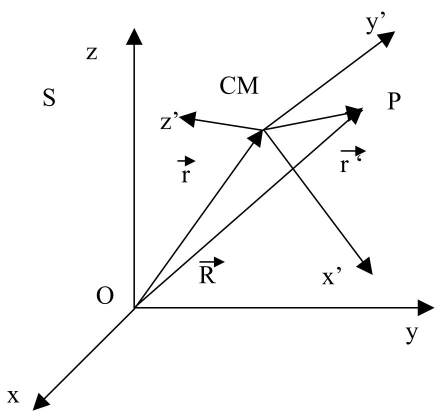


Fig.3

Vom defini **momentul cinetic total** $\vec{L}'$ şi **energia cinetică totală** E'_{cin} ale sistemului de particule în mişcarea relativă faţă de centrul de masă prin relaţiile:

$$\vec{L}' \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) \tag{2.128}$$

$$E'_{cin} \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v'^2 \tag{2.129}$$

Ne interesează în continuare care este relaţia dintre momentul cinetic total $\vec{L}$, în mişcarea absolută şi momentul cinetic total $\vec{L}'$, îm mişcarea relativă faţă de centrul de masă:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &\equiv \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{N}[(m_i(\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (\vec{V} + \vec{v}'_i)] \\
&= (\sum_{i=1}^{N} m_i)(\vec{R} \times \vec{V}) + (\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}'_i) \times \vec{V} + \vec{R} \times (\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}'_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) = M(\vec{R} \times \vec{V}) + \vec{L}' \\
\rightarrow \vec{L} &= M(\vec{R} \times \vec{V}) + \vec{L}' \qquad (2.130)
\end{aligned}$$

Relaţia (2.6.129) reprezintă **teorema lui König pentru momentul cinetic**: momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale este egal cu suma dintre momentul cinetic al centrului de masă, în care se presupune concentrată masa totală a sistemului, şi momentul cinetic în mişcarea relativă faţă de centrul de masă.

Să vedem în continuare care sunt relaţiile dintre energiile cinetice totale E_{cin}, în mişcarea absolută şi E'_{cin}, în mişcarea relativă faţă de centrul de masă:

$$E_{cin} \equiv \sum_{i=1}^{N} E_{cin,i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \quad (2.131)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V} + \vec{v}'_i)^2 = \frac{1}{2}MV^2 + E'_{cin}$$

$$\rightarrow E_{cin} = \frac{1}{2}MV^2 + E'_{cin} \quad (2.132)$$

Relaţia (2.6.130) reprezintă **teorema lui König pentru energia cinetică**: energia cinetică totală a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma dintre energia cinetică a centrului de masă, presupus a avea masa egală cu masa totală a sistemului, şi energia cinetică totală în mişcarea relativă faţă de centrul de masă.

Observaţie: teoremele momentului cinetic şi energiei cinetice , valabile într-un sistem de referinţă inerţial S, işi păstrează forma în sistemul de referinţă S', care în general este neinerţial.

2.7 Probleme

2.1 Vectorul de poziţie al unui punct material este dat de legea de mişcare:

$$\vec{r} = 5(\cos 3t)\vec{i} + 4(\sin 3t)\vec{j}$$

unde (r) este măsurat în metri iar timpul t în secunde. Determinaţi:

a). viteza şi acceleraţia particulei la momentul $t = 10s$ de la începerea mişcării

b). traiectoria pe care se mişcă punctul material

Rezolvare:

a. Legea vitezei punctului material se determină din relaţia de definiţie:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(5\cos 3t\vec{i} + 4\sin 3t\vec{j}) \\ &= -15\,(\sin 3t)\,\vec{i} + 12(\cos 3t)\vec{j}\end{aligned}$$

Mărimea vectorului viteză este:

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(15\sin 3t)^2 + (12\cos 3t)^2} \\ &= 3\sqrt{(-9\cos^2 3t + 25)}\end{aligned}$$

La momentul $t = 10s$ viteza este:

$$v(1) = 3\sqrt{(-9\cos^2 30 + 25)} = 14.936m/s$$

Pentru acceleraţie se procedează în mod similar:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-15\sin 3t\vec{i} + 12\cos 3t\vec{j}) \\ &= -45\,(\cos 3t)\,\vec{i} - 36\,(\sin 3t)\,\vec{j}\end{aligned}$$

Mărimea vectorului acceleraţie este:

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{(-45\cos 3t)^2 + (-36\sin 3t)^2}\\ &= 9\sqrt{(9\cos^2 3t + 16)}\end{aligned}$$

La momentul $t = 10s$ acceleraţia este:

$$a(1) = 9\sqrt{(9\cos^2 30 + 25)} = 45.192m/s^2$$

b. Ecuaţia traiectoriei de găseşte prin eliminarea timpului din ecuaţiile cinematice ale mişcării:

$$\begin{aligned}x &= 5\cos 3t\\ y &= 4\sin 3t\end{aligned}$$

Folosind relaţia fundamentală din trigonometrie:

$$\sin^2 3t + \cos^2 3t = 1$$

se obţine:

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{25} = 1$$

Aceasta reprezintă ecuaţia unei elipse cu semiaxele de $2m$ şi respectiv $5m$.

2.2 Un punct material se deplasează cu viteza constantă v pe o elice definită de ecuaţiile parametrice:

$$\begin{aligned}x &= 5\cos 2t\\ y &= 5\sin 2t\\ z &= vt\end{aligned}$$

unde distanţele (x, y, z) sunt măsurate în metri iar timpul t în secunde. Determinaţi acceleraţia particulei în funcţie de timp.

Rezolvare:

Conform definiţiei, acceleraţia este:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

unde:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(-10\sin 2t) = -20\cos 2t \\
\ddot{y} &= \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt}(10\cos 2t) = -20\sin 2t \\
\ddot{z} &= \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d}{dt}(v) = 0
\end{aligned}$$

Vectorul acceleraţie este:

$$\vec{a} = -20\cos 2t\vec{i} - 20\sin 2t\vec{j}$$

iar mărimea acceleraţiei depinde de timp după legea:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-20\cos 2t)^2 + (-20\sin 2t)^2} = 20m/s^2$$

2.3 Se ştie că viteza unui punct material variază în timp după legea:

$$\vec{v}(t) = 1.5t^2\vec{i} + 1.8t\vec{j} + t^3\vec{k}(m/s)$$

Să se determine:

a). deplasarea punctului material între momentele de timp $t_1 = 1s$ şi $t_2 = 3s$
b). mărimea şi orientarea acceleraţiei (cosinuşii directori ai unghiurilor α, β, γ dintre vectorul acceleraţie şi axele de coordonate) la momentul de timp $t_2 = 3s$

Rezolvare:

a. Variaţia vectorului de poziţie în intervalul de timp considerat:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

este:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Din definiţia vitezei se observă că:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{v}dt \\ \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} d\vec{r} &= \int_{t_2}^{t_1} \vec{v}dt \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 &= \int_1^3 (1.5t^2\vec{i} + 1.8t\vec{j} + t^3\vec{k})dt \\ &= 13.0\vec{i} + 7.2\vec{j} + 20.0\vec{k} \end{aligned}$$

Mărimea acestei deplasări este:

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{13.0^2 + 7.2^2 + 20.0^2} = 24.917m$$

b. Vectorul acceleraţie este:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(1.5t^2\vec{i} + 1.8t\vec{j} + t^3\vec{k} = \\ &= 3.0t\vec{i} + 1.\,8\vec{j} + 3t^2\vec{k}\end{aligned}$$

iar mărimea:

$$\begin{aligned}a(t &= 2) = \sqrt{(3.0 \times 2)^2 + (1.\,8)^2 + (3.0 \times 4)^2} \\ &= 13.\,537 m/s^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{a_x}{a} = \frac{3.0 \times 2}{13.\,537} = 0.\,4432 \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{a} = \frac{1.8}{13.\,537} = 0.\,1329 \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{a} = \frac{3.0 \times 4}{13.\,537} = 0.\,8864\end{aligned}$$

Evident că trebuie să se verifice relaţia:

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1 \\ 0.\,4432^2 + 0.\,1329^2 + 0.\,8864^2 &= 0.\,9998\end{aligned}$$

2.4 Să se deducă ecuaţia de mişcare a unui corp de masă m sub acţiunea unei forţe constante:

$$F(x, \dot{x}, t) = F_0 = const.$$

Rezolvare

Folosind definiţia acceleraţiei şi principiul fundamental al mecanicii, se găseşte prin integrare:

$$\dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t)dx = \frac{1}{m}\int_0^t F dt = \frac{F_0}{m}t + \dot{x}(0)$$

Constanta de integrare este valoarea vitezei la momentul iniţial. Se observă că viteza creşte liniar cu timpul.
Integrând din nou, având în vedere definiţia vitezei, obţinem ecuaţia de mişcare:

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t)dt = \frac{F_0}{2m}t^2 + \dot{x}(0)t + x(0)$$

Trebuie facută observaţia că alegerea momentului de timp $t_0 = 0$ este arbitrară. Ecuaţia mişcării este valabilă la orice alt moment de timp considerat iniţial, t_0, sub forma:

$$x(t - t_0) = \frac{F_0}{2m}(t - t_0)^2 + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + x(t_0)$$

Expresia obţinută reprezintă ecuaţia unei parabole.

2.5 Un corp de masă m se află iniţial în repaus şi asupra lui se aplică o forţă:

$$F = F_0 e^{-\lambda t}$$

unde $\lambda > 0, F_0 -$ constante. Determinaţi legea de mişcare şi legea vitezei.

Rezolvare:

Deoarece mişcarea se presupune unidimensională:

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 e^{-\lambda t}$$

După separarea variabilelor se poate integra:

$$\int_0^v dv = \frac{F_0}{m}\int_0^t e^{-\lambda t} dt$$

Se obţine:

$$v(t) = \frac{F_0}{\lambda m}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

Legea spaţiului o obţinem prin integrarea legii vitezei:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v dt \\ x(t) &= \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda t}\right) dt \\ x(t) &= \frac{F_0}{\lambda^2 m}(e^{-\lambda t} + \lambda t - 1) \end{aligned}$$

2.6 Să se studieze mişcarea unidimensională a unui corp de masă m sub acţiunea unei forţe de tipul $F = -kv$.

Rezolvare:

Înlocuind expresia forţei în ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

După separarea variabilelor:

$$dt = -\frac{m}{k}\frac{dv}{v}$$

şi integrare, rezultă:

$$t - t_0 = -\frac{m}{k}\int\limits_{v(t_0)}^{v(t)}\frac{dv}{v}$$

În urma efectuării integralei şi după rearanjarea termenilor se obţine:

$$\frac{k}{m}(t - t_0) = \ln v_0 - \ln v$$

Considerând că $t_0 = 0$, şi că $v(t_0) = v_0$ după aplicarea funcţiei inverse logaritmului, se obţine expresia legii vitezei:

$$\begin{aligned} v &= v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \\ &= v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

unde

$$\tau = \frac{m}{k}$$

Semnificaţia coeficientului τ este acum evidentă. Pentru ca relaţia vitezei să fie corectă dimensional trebuie ca exponentul să fie adimensional. Prin urmare

$$[\tau] = T^{-1}$$

şi reprezintă un timp, numit *timp de relaxare.* Se observă că:

$$t = \tau \Rightarrow v = \frac{v_0}{e}$$

Timpul de relaxare se defineşte ca timpul după care viteza scade de e ori.
Analizând graficul vitezei dat în Fig. 2.6.1 putem face unele observaţii legate de cazurile limită.
Se observă că pe măsură ce scade valoarea lui k, scăderea exponentială a vitezei se face pe un drum mai lent, timpii de relaxare corespunzători scăzând.
Pentru a găsi legea mişcării, integram din nou legea vitezei:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-\frac{v}{\tau}} dt$$

unde x_0 este poziţia corespunzătoare momentului iniţial $t_0 = 0$.
Efectuând integrala se obţine în final legea mişcării, sub forma:

$$x(t) = x_0 + v_0\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

O analiză simplă a acestei relaţii arată că, oricât de lung ar fi timpul avut la dispoziţie de corp, el nu se mişcă la infinit ci doar pe o distanţă finită.

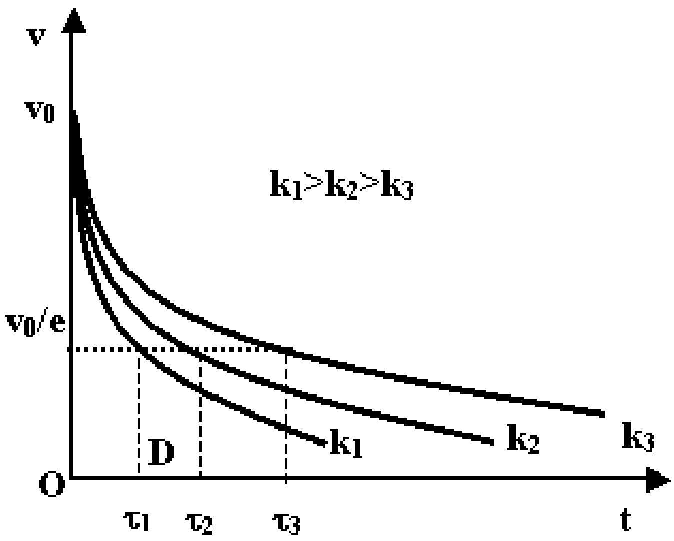


Fig. 2.6.1: Dependenţa de timp a vitezei, $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$, pentru trei valori diferite ale coeficientului de frecare: $k_1 > k_2 > k_3$

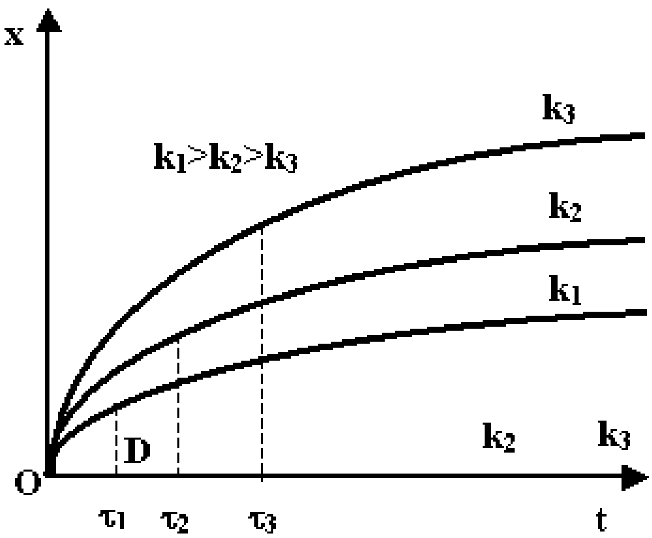


Fig. 2.6.2: Reprezentarea spaţiului parcurs pentru diferite valori ale coeficientului de frecare, pentru cazul $x_0 = 0$

Din Fig. 2.6.2 se observă că pe măsură ce scade valoarea lui k, distanţa parcursă de corp creşte. Oricât de mult ar creşte însă timpul de mişcare, distanţa parcursă nu poate depăşi o anumită limită. Să analizăm cazurile limită ale mişcării.

• Pentru un interval de timp scurt, imediat după începerea mişcării, $\frac{t}{\tau} \to 0$. Folosim dezvoltarea în serie Taylor:

$$e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/3 + ...$$

Acest lucru ne permite să scriem legea vitezei ca:

$$\begin{aligned} v &= v_0(1 - \frac{k}{m}t + ...) \simeq v_0 - \frac{kv_0}{m}t = \\ &= v_0 + \frac{F_0}{m}t = v_0 + a_0 t \end{aligned}$$

unde:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{F^0}{m} \\ F_0 &= -kv_0 \end{aligned}$$

corespund acceleraţiei şi respectiv forţei la momentul $t = 0$.
Folosind aceeaşi aproximare şi pentru spatiul parcurs, se obţine:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_0 m}{k}\left(1 - 1 + \frac{k}{m}t - \frac{1}{2}\frac{k^2}{m^2}t^2 ...\right) \simeq \\ &\simeq x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\frac{v_0 k}{m}t^2 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 \end{aligned}$$

Se observă că s-au regăsit ecuaţiile mişcării sub acţiunea unei forţe constante.

• Analizăm ce se întâmplă după un interval de timp suficient de lung, adică atunci când $t \to \infty$. Deoarece:

$$\lim_{z \to \infty} e^{-z} = 0$$

viteza limită devine:

$$v \to 0$$

iar spaţiul limită:

$$x \to x_0 + \frac{v_0 m}{k}$$

2.7 Să se studieze mişcarea unidimensională a unui corp de masă m sub acţiunea unei forţe de tipul $F = -kv^2$.

Rezolvare:

Înlocuim expresia forţei în ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

După separarea variabilelor:

$$dt = -\frac{m}{k}\frac{dv}{v^2}$$

găsim:

$$t - t_0 = -\frac{m}{k} \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2}$$

ceea ce conduce, după integrare şi considerarea lui $t_0 = 0$, la expresia vitezei:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{kv_0}{m} t}$$

Aflăm legea spaţiului printr-o nouă integrare.

$$\int\limits_{x_0}^{x} dx = \int\limits_{0}^{t} \frac{v_0}{1 + \frac{kv_0}{m} t} dt$$

Integrala din membrul al doilea se rezolvă uşor dacă se face substituţia: $u = 1 + \frac{kv_0}{m} t$. Se obţine:

$$x = x_0 + \frac{m}{k} \ln \left(\frac{kv_0}{m} t + 1 \right)$$

2.8 Să se studieze mişcarea unidimensională a unui corp de masă m legat de un resort cu constanta elastică k, în absenţa frecării.
Rezolvare:

Înlocuim expresia forţei în ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

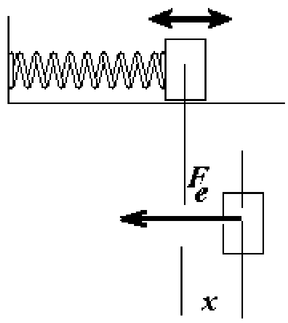


Fig. 2.8.1

Vom studia această mişcare folosind legea conservării energiei. Trebuie să aflăm aşadar care este valoarea energiei cinetice şi a celei potenţiale.

Conform definiţiei, valoarea energiei potenţiale a forţei elastice corespunzătoare unei deformări oarecare x a resortului luând ca referinţă valoarea zero pentru energia potenţial în poziţia nedeformată a resortului, este:

$$E_p(x) = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

În punctul $x = 0$ energia potenţială este nulă, de aceea energia totală este în întregime energie cinetică.

$$E(x = 0) = E_c$$

Să considerăm valoarea energiei cinetice de forma:

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2$$

A este distanţa maximă până la care poate ajunge punctul material şi se numeşte **amplitudine**.
Scriem conservarea energie între momentul în care corpul trece prin poziţia nedeformată şi un moment oarecare:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 v^2 = \frac{2}{m}\frac{k}{2}(A^2 - x^2)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\frac{k}{2}(A^2 - x^2)}$$

După separarea variabilelor se obţine:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\frac{k}{2}\left[A^2 - x^2\right]}} = \\ &= \int_{\arcsin x_0/A}^{\arcsin x/A} \frac{A\cos\theta d\theta}{\sqrt{\frac{k}{m}A^2\left[1 - \sin^2\theta\right]}} = \\ &= \int_{\arcsin x_0/A}^{\arcsin x/A} \frac{A\cos\theta d\theta}{\omega A\cos\theta} = \\ &= \frac{1}{\omega_0}\left(\arcsin x/A - \arcsin x_0/A\right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

S-a făcut schimbarea de variabilă $x = A\sin\theta$ şi s-a notat $\frac{k}{m} = \omega_0^2$
Considerând că $t_0 = 0$ şi aflând pe x în funcţie de t rezultă:

$$\omega_0 t + \arcsin\frac{x_0}{A} = \arcsin\frac{x}{A}$$

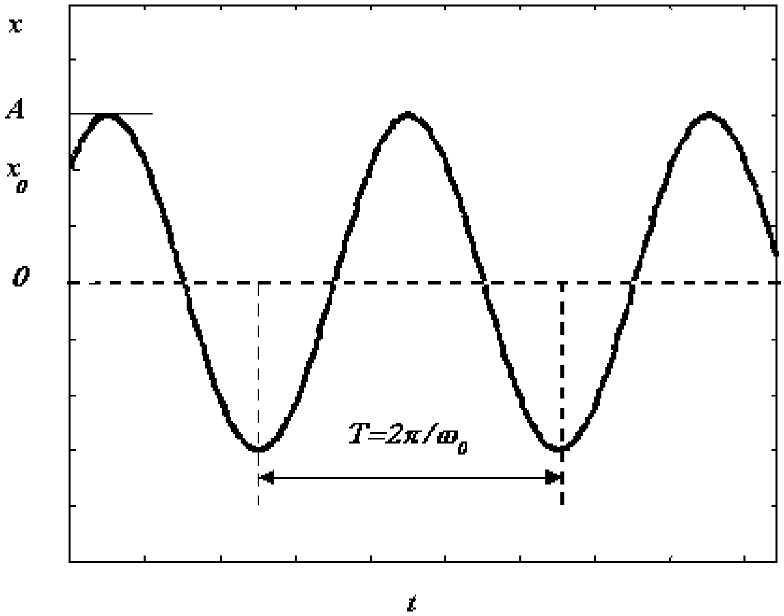


Fig.2.8.2 - Reprezentarea grafică a unei mişcări oscilatorii

adică:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \arcsin\frac{x_0}{A})$$

Mărimea ω_0 se numeşte **frecvenţă unghiulară** sau **pulsaţia proprie** a oscilaţiilor iar $\varphi_0 = \arcsin\frac{x_0}{A}$ **faza iniţială** a mişcării. După cum este definită, frecvenţa unghiulară este o mărime constantă, caracteristică corpului şi nu depinde de condiţiile iniţiale. În Fig. 2.8.2 este reprezentarea grafică a unei mişcări oscilatorii cu vizualizarea principalelor mărimi caracteristice.

2.9 O bilă legată de un punct fix printr-un fir se roteşte uniform pe un plan orizontal neted fără frecări cu turaţia n_1. De câte ori se modifică turaţia bilei dacă firul se scurtează la jumătate?

Rezolvare:

Pentru un sistem izolat, momentul cinetic se conservă. Ca urmare:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

Conform definiţiei:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Deoarece mişcarea bilei se produce în permanenţă în acelaşi sens, nici direcţia şi nici modulul vectorului nu se modifică (determinate prin regula burghiului). Ca urmare, conservarea implică egalitatea mărimilor momentului unghiular pentru cele două situaţii.

$$\begin{aligned} r_1 m v_1 &= r_2 m v_2 \Rightarrow \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

Vitezele v_1 şi v_2 sunt viteze liniare în mişcările circulare de raze corespunzătoare r_1 şi r_2.

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 r_1 = 2\pi n_1 r_1 \\ v_2 &= \omega_2 r_2 = 2\pi n_2 r_2 \end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1 r_1}{n_2 r_2}$$

Rezultă:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1 r_1}{n_2 r_2} \Rightarrow$$
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Înlocuind valorile numerice, se obţine:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1^2}{(r_1/2)^2} = 4$$

2.10 Demonstraţi că următoarea forţă este conservativă şi găsiţi energia potenţială corespunzătoare:

$$\vec{F} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$$

$a, b, c-$ constante.

Rezolvare:

Pentru a demonstra că forţa este conservativă, verificăm condiţia integrală:

$$rot\vec{F} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

Intr-adevăr:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax & by & cz \end{vmatrix} = 0$$

Ca urmare, forţa este conservativă şi poate fi definită energia potenţială:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

De aici rezultă diferenţa de energie potenţială dintre două puncte oarecare:

$$U - U_0 = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

In coordonate carteziene acest lucru înseamnă:

$$\begin{aligned} U - U_0 &= -\int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= -\int F_x dx - \int F_y dy - \int F_z dz \\ &= -\int ax dx - \int by dy - \int cz dz \\ &= -\frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2) \end{aligned}$$

2.11 Să se găsească pentru următorul sistem de puncte materiale:

$$\begin{aligned} m_1 = 1kg,\ \vec{r}_1 &= 2t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 4\vec{k}(m) \\ m_2 = 3kg,\ \vec{r}_2 &= (1+t^2)\vec{i} + (2+5t)\vec{j}(m) \\ m_3 = 5kg,\ \vec{r}_3 &= (1+2t^2)\vec{i} + 4t^2\vec{k}(m) \end{aligned}$$

la momentele de timp $t = 0s$ şi $t = 10s$: (a) poziţia centrului de masă; (b) viteza centrului de masă; (c) impulsul sistemului; (d) energia cinetică.

Rezolvare:

a. Vectorul de poziţie al centrului de masă este:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

După înlocuirea valorilor date în ipoteza problemei, rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{CM} &= \frac{2t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 4\vec{k} + 3[(1+t^2)\vec{i} + (2+5t)\vec{j}] + 5[(1+2t^2)\vec{i} + 4t^2\vec{k}]}{1+3+5} \\ &= \frac{1}{9}(15t^2+8)\vec{i} + \frac{1}{9}(18t+6)\vec{j} + \frac{4}{9}(1+5t^2)\vec{k} \end{aligned}$$

Valorile vectorului de poziţie la momentele de timp $t_1 = 0s$ şi $t_2 = 10s$ sunt:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{CM}(0) &= \frac{8}{9}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{4}{9}\vec{k} \\ \vec{R}_{CM}(10) &= \frac{1508}{9}\vec{i} + \frac{62}{3}\vec{j} + \frac{668}{3}\vec{k} \end{aligned}$$

b. Derivăm expresia vectorului de poziţie şi obţinem viteza centrului de masă:

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{CM} &= \frac{d}{dt}[\frac{1}{9}(15t^2+8)\vec{i}+\frac{1}{9}(18t+6)\vec{j}+\frac{4}{9}(1+5t^2)\vec{k}] \\
&= \frac{10}{3}t\vec{i}+2\vec{j}+\frac{40}{9}t\vec{k}
\end{aligned}$$

Valorile vectorului viteză la momentele de timp $t_1 = 0s$ şi $t_2 = 10s$ sunt:

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{CM}(0) &= 2\vec{j} \\
\vec{V}_{CM}(10) &= \frac{100}{3}\vec{i}+2\vec{j}+\frac{400}{9}\vec{k}
\end{aligned}$$

c. Impulsul sistemului este:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= (m_1+m_2+m_3)\vec{V}_{CM} \\
&= 30t\vec{i}+18\vec{j}+44t\vec{k} \\
\vec{P}(0) &= 18\vec{j} \\
\vec{P}(10) &= 300t\vec{i}+18\vec{j}+440\vec{k}
\end{aligned}$$

d. Energia cinetică:

$$\begin{aligned}
E_{cin}(t) &= E_{cin,1}(t)+E_{cin,2}(t)+E_{cin,3}(t) \\
&= \frac{1}{2}m_1v_1^2(t)+\frac{1}{2}m_2v_2^2(t)+\frac{1}{2}m_3v_3^2(t)
\end{aligned}$$

Vectorii viteză pentru cele trei corpuri sunt:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \frac{d}{dt}(2t^2\vec{i}+3t\vec{j}+4\vec{k}) = 4t\vec{i}+3\vec{j} \\
\vec{v}_2 &= \frac{d}{dt}\left[(1+t^2)\vec{i}+(2+5t)\vec{j}\right] = 2t\vec{i}+5\vec{j} \\
\vec{v}_2 &= \frac{d}{dt}\left[(1+2t^2)\vec{i}+4t^2\vec{k}\right] = 4t\vec{i}+8t\vec{k}
\end{aligned}
$$

iar mărimile corespunzătoare:

$$
\begin{aligned}
v_1(t) &= \sqrt{(4t)^2+3^2}; v_1(0) = 3m/s; v_1(10) = 40.\,11m/s \\
v_2(t) &= \sqrt{(2t)^2+5^2}; v_2(0) = 5m/s; v_2(10) = 20.\,62m/s \\
v_3(t) &= \sqrt{(4t)^2+(8t)^2}; v_3(0) = 0m/s; v_3(10) = 89.\,44m/s
\end{aligned}
$$

După evaluările numerice se obţine:

$$
\begin{aligned}
E_{cin}(0) &= 42.0J \\
E_{cin}(10) &= 21.44kJ
\end{aligned}
$$

Capitolul 3

Mecanica analitică

3.1 Mărimi caracteristice

În Mecanica newtoniană se studiază mişcarea corpurilor macroscopice care se deplasează cu viteze mici în comparaţie cu viteza luminii, printr-o **abordare locală** . Ecuaţia de bază cu ajutorul căreia se poate determina starea mecanică a unui corp este ecuaţia Newton, dată de principiul doi al Mecanicii:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \tag{3.1}$$

Dacă se cunosc forţele care acţionează asupra corpului (sistemului) precum şi starea mecanică iniţială $(\vec{r}_o, \vec{v}_o)$, atunci se poate determina, la orice moment t starea mecanică a corpului $(\vec{r}, \vec{v})$.

Mecanica analitică a fost dezvoltată de către Lagrange, Euler şi Hamilton în scopul rezolvării unor probleme mai complicate de mecanică. Studiul mişcării unui sistem fizic, în Mecanica analitică, **are la bază un principiu de extremum** care ne spune că, mişcarea are loc întotdeauna pe aceea traiectorie pentru care o

anumită funcţie, care descrie starea sistemului îşi atinge extremul.

Ecuaţiile ce descriu mişcarea unui sistem în abordarea analitică sunt ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I şi II.

Acest formalism este folosit în studiul sistemelor cu un număr mare de constituenţi (de exemplu în Mecanica statistică) sau pentru **sisteme mecanice cu legături**.

Fie un sistem format din N puncte materiale. Starea mecanică a sistemului este definită, la fiecare moment, prin coordonatele carteziene şi componentele vitezelor tuturor punctelor faţă de un sistem de referinţă inerţial. Vom folosi următoarele notaţii pentru coordonatele carteziene şi pentru componentele vitezelor celor N puncte materiale:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ...x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N} \tag{3.2}$$

$$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6, ...\dot{x}_{3N-2}, \dot{x}_{3N-1}, \dot{x}_{3N} \tag{3.3}$$

unde s-a ţinut cont că fiecare particulă este caracterizată de trei coordonate carteziene şi respectiv trei componente ale vitezei. O notaţie similară va fi folosită şi pentru forţă:

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6......F_{3N-2}, F_{3N-1}, F_{3N} \tag{3.4}$$

unde primele trei valori reprezintă componentele forţei totale ce se exercită asupra primului punct material s.a.m.d.

Ecuaţiile de mişcare pentru sistemul de N puncte materiale caracterizate prin coordonatele carteziene (3.1.2), scrise pe componente vor fi:

$$m_s \ddot{x}_s = F_s \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.5}$$

cu convenţia ca:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m_3 \\ m_4 &= m_5 = m_6 \\ &. \\ &. \\ &. \\ m_{3N-2} &= m_{3N-1} = m_{3N} \end{aligned}$$

adică, primele trei componente ale masei sunt egale si reprezintă masa primei particule, s.a.m.d.

Se spune că sistemul este supus unor **legături** (sau constrângeri), dacă sunt impuse anumite restricţii asupra alegerii variabilelor (3.1.2) şi (3.1.3). Aceste restricţii se exprimă prin anumite relaţii, care pot avea fie forma unor egalităţi, fie cea a unor inegalităţi:

$$f(x_s, \dot{x}_s, t) = 0 \quad \text{sau} \quad f(x_s, \dot{x}_s, t) \geq 0 \tag{3.6}$$

Vom considera în continuare acele legături care depind numai de coordonatele de poziţie şi de timp, $f(x_s, t) = 0$. Dacă vom deriva această relaţie în raport cu timpul, vom obţine:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_s} \dot{x}_s \tag{3.7}$$

Se observă că acestă relaţie conţine şi vitezele $\dot{x}_s$. Dacă toate relaţiile care conţin vitezele se pot obţine prin derivarea în raport cu timpul a unor relaţii în care apar numai coordonatele de poziţie (şi eventual timpul) se spune că sistemul este supus unor **legături olonome**. Dacă există relaţii care conţin vitezele $\dot{x}_s$ dar

care nu pot fi obţinute prin derivarea în raport cu timpul a unor relaţii numai între coordonatele de poziţie, se spune că sistemul este supus la **legături neolonome**.

Vom considera în continuare numai sistemele de particule supuse unor legături olonome exprimate prin relaţii de forma:

$$f_k(x_s, t) = 0 \quad k = \overline{1, \nu} \quad s = \overline{1, 3N} \tag{3.8}$$

unde ν reprezintă numărul de legături la care este supus sistemul.

Observaţie: numărul ν nu poate fi arbitrar de mare. Sistemul $f_k(x_s, t) = 0$ este un sistem în necunoscutele x_s. Dacă ,

• $\nu > 3N$, atunci sistemul devine incompatibil şi nu are sens fizic
• $\nu = 3N$, atunci sistemul pote fi rezolvat şi se pot determina cele $3N$ necunoscute
• $\nu < 3N$, atunci sistemul este nedeterminat

Acest ultim caz este cel mai interesant din punct de vedere fizic. Vom nota prin:

$$l = 3N - \nu \tag{3.9}$$

diferenţa dintre numărul necunoscutelor şi numărul legăturilor (ecuaţiilor). Acest număr întreg şi pozitiv reprezintă **numărul gradelor de libertate** ale sistemului mecanic dat. Deci, l dintre variabilele x_s pot fi alese în mod arbitrar (independente), iar restul $\nu = 3N - l$ pot fi determinate în funcţie de primele prin rezolvarea sistemului de ecuaţii:

$$f_k(x_s, t) = 0 \quad k = \overline{1, \nu} < 3N \quad l = 3N - \nu \tag{3.10}$$

Pentru a lucra numai cu variabile independente, Lagrange parametrizează realţiile (3.1.10), adică variabilele x_s sunt exprimate în funcţie de noi variabile $q_i, (i = \overline{1, l})$ şi eventual de timp:

$$x_s = x_s(q_1, q_2, ...q_l, t) \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.11}$$

Variabilele q_i se numesc **coordonatele generalizate** ale lui Lagrange, iar numărul lor este egal evident cu l, numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Variabilelor generalizate q_i $(i = \overline{1, l})$ li se poate asocia un spaţiu matematic cu l dimensiuni numit **spaţiul configuraţiilor**. Fiecărui punct din acest spaţiu îi corespunde un **ansamblu de valori** $[q_i(i = 1, 2, 3...l)]$. Cu alte cuvinte, unei configuraţii instantanee a sistemului de N particule îi corespunde un punct în spaţiul configuraţiilor numit **punct reprezentativ**. Odată cu schimbarea în timp a configuraţiei sistemului rezultă o schimbare a poziţiei punctului reprezentativ, astfel încât el descrie o curbă în acest spaţiu numită **traiectorie generalizată** caracterizată prin **ecuaţiile parametrice**:

$$q_i = q_i(t) \qquad i = \overline{1, l} \tag{3.12}$$

Să presupunem dat un sistem de N puncte materiale asupra cărora acţionează nişte forţe date, de componente F_s $(s = \overline{1, 3N})$(3.1.4). Dacă sistemul nu ar fi supus unor legături, atunci ecuaţiile de mişcare ar avea forma (3.1.5). Dacă însă există legături, date prin relaţii de forma (3.1.8), atunci ecuaţiile de mişcare nu mai pot fi scrise sub forma (3.1.5). Existenţa legăturilor atrage după sine apariţia unor noi forţe, denumite **forţe (reacţii) de sprijin**

(sau de legătură) şi notate prin R_s. Deci, ecuaţiile de mişcare pentru un sistem de N particule supus la legături se va scrie sub forma:

$$m_s \ddot{x}_s = F_s + R_s \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.13}$$

Se observă că, spre deosebire de forţele F_s, care sunt propuse date, reacţiile R_s sunt necunoscute şi ele trebuie determinate din condiţiile problemei.

Dacă legăturile impuse sistemului de puncte materiale obligă unul dintre puncte de a se afla permanent pe o anumită curbă, aceasta exercită asupra punctului material respectiv o forţă de spijin $\vec{R}$. În acest caz vom descompune forţa $\vec{R}$ într-o componentă $\vec{R}_n$ situată în planul normal la curbă şi o componentă $\vec{R}_t$ situată de-a lungul tangentei la curbă. Componenta $\vec{R}_t$ se numeşte **forţa de frecare** exercitată de curbă asupra punctului şi se opune deplasării acestuia în lungul curbei.

3.2 Formalismul Lagrange

3.2.1 Principiul lucrului mecanic virtual

Fie un sistem de N puncte materiale supus la ν legături olonome ((3.1.8) şi cu l grade de libertate. Vom presupune că frecările sunt neglijabile, adică **legăturile sunt perfecte**. Ecuaţiile de mişcare au forma (3.1.13) unde F_s reprezintă componentele forţelor date, iar R_s componentele forţelor de sprijin necunoscute.

Pentru determinarea mişcării unui sistem de felul celui considerat, Lagrange propune următoarea metodă ce constă din două etape:

• determinarea funcţiilor $x_s(t)$
• determinarea reacţiilor R_s cu ajutorul ecuaţiilor (3.1.13) scrise sub forma:

$$R_s = m_s \ddot{x}_s - F_s \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.1}$$

Pentru rezolvarea primei etape vor trebui eliminate forţele de legătură R_s. Pentru aceasta se va ţine cont că legăturile sunt perfecte, deci componentele tangenţiale ale forţelor de sprijin se anulează. Dacă deplasăm arbitrar orice punct material al sistemului de-a lungul curbei pe care acest punct este obligat să se găsească în baza legăturilor, forţa de sprijin rămâne normală la curbă, iar lucrul mecanic efectuat de această forţă va fi nul. Această afirmaţie este însă adevărată numai dacă curba nu se deplasează în timp.

Aceste consideraţii ne conduc la definirea **deplasării virtuale** δx_s a sistemului considerat, ca fiind orice variaţie continuă a coordonatelor x_s, astfel încât condiţiile de legătură (3.1.8) să fie mereu satisfăcute, **la o valoare constantă a variabilei** t.

Fie o deplasare virtuală infinitezimală δx_s a sistemului de puncte materiale; acesta va trece de la coordonatele x_s la coordonatele $x + \delta x_s$ astfel încât să fie satisfăcute, pe lângă realaţiile (3.1.8) şi relaţiile:

$$f_k(x_s + \delta x_s, t) = 0 \qquad k = \overline{1, \nu} \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.2}$$

în care t nu a variat. Vom scădea ecuaţiile (3.2.2) şi (3.1.8), dezvoltăm după puterile cantităţilor δx_s şi păstrăm numai acei termeni de ordinul întâi:

$$f_k(x_s + \delta x_s, t) - f_k((x_s, t) =$$

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_s} \delta x_s \equiv 0 \tag{3.3}$$

relaţie ce reprezintă chiar **condiţiile pentru ca deplasările** δx_s **să fie virtuale**.
Pentru orice deplasare virtuală infinitezimală ce satisface condiţiile (3.2.3), lucrul mecanic al forţelor de sprijin este nul:

$$\sum_{s=1}^{3N} R_s \delta x_s = 0 \tag{3.4}$$

Această afirmaţie constituie enunţul **principiului lucrului mecanic virtual** sau **principiul lui d'Alembert** care stă la baza formalismului Lagrange. Pe baza lui se pot elimina reacţiile de sprijin R_s din ecuaţiile de mişcare (3.1.13); este suficient să înmulţim cu δx_s ambii membrii ai ecuaţiei (3.1.13) şi să sumăm pentru toate valorile indicelui s. Utilizând relaţia (3.2.4), vom obţine:

$$\sum_{s=1}^{3N} x_s \ddot{x}_s \delta x_s = \sum_{s=1}^{3N} F_s \delta x_s \tag{3.5}$$

din care au dispărut componentele R_s. Principiul lucrului mecanic virtual se mai poate scrie şi sub forma:

$$\sum_{s=1}^{3N} (m_s \ddot{x}_s - F_s) \delta x_s = 0 \tag{3.6}$$

Observaţie: deplasarea virtuală δx_s nu are numic comun cu deplasarea reală în cursul mişcării sistemului, în care evident timpul variază.

3.2.2 Forţele generalizate

Fie un sistem de N puncte materiale supus la ν legături olonome şi perfecte şi fie $q_i(x_s, t)$ $(i = \overline{1, l}, s = \overline{1, 3N})$ coordonatele generalizate introduse prin relaţia (3.1.11). Se observă că o deplasare virtuală infinitezimală δx_s a sistemului se obţine variind în mod arbitrar, la timp constant, variabilele q_i:

$$\delta x_s = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \delta q_i \qquad i = \overline{1, l} \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.7}$$

Întocându-ne la relaţia (3.2.5), observăm că membrul drept al ecuaţiei reprezintă lucrul mecanic elementar al forţelor date, într-o deplasare virtuală:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{s=1}^{3N} F_s \delta x_s = \sum_{s=1}^{3N} F_s \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \delta q_i \\ \rightarrow \delta L &= \sum_{i=1}^{l} Q_i \delta q_i \end{aligned} \tag{3.8}$$

unde s-a utilizat relaţia (3.2.7) pentru deplasarea virtuală. Notaţia:

$$Q_i = \sum_{s=1}^{3N} F_s \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \tag{3.9}$$

reprezintă **forţele generalizate** corespunzătoare coordonatelor generalizate q_i $(i = \overline{1, l})$:

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, ...q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2....\dot{q}_l, t) \tag{3.10}$$

unde $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2....\dot{q}_l\}$ reprezintă **vitezele generalizate.**

Observaţie: dacă forţele F_s derivă dintr-o energie potenţială, atunci lucrul mecanic elementar este egal, până la semn, cu variaţia energiei potenţiale:

$$\delta L = -\delta U \tag{3.11}$$

Dacă vom ţine cont de expresia (3.2.8) a lucrului mecanic elementar exprimat prin forţele generalizate, atunci realţia (3.2.11) devine:

$$\delta L = -\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \tag{3.12}$$

ceea ce conduce la exprimarea forţelor generalizate, în cazul forţelor conservative F_s, prin relaţia:

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad i = \overline{1,l} \tag{3.13}$$

3.2.3 Ecuaţiile Lagrange

Fie un sistem de N puncte materiale supuse la ν legături olonome şi perfecte şi care posedă **energia cinetică** E_{cin} exprimată prin:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{3N} m_s \dot{x}_s^2 \tag{3.14}$$

Dacă vom înlocui în expresia principiului d'Alembert (3.2.6) expresia deplasărilor infinitezimale virtuale (3.2.7), şi dacă ţinem şi de (3.2.14) vom ajunge la setul de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_{cin}}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = \overline{1,l} \tag{3.15}$$

ceea ce reprezintă **ecuaţiile Lagrange** pentru determinarea mişcării sistemului. Ele sunt în număr egal cu numărul l al gradelor de libertate ale sistemului. Prin integrarea acestui sistem de ecuaţii se va obţine dependenţa coordonatelor generalizate de timp, $q_i(t)$. Apoi, cu aceste coordonate odată determinate se pot deduce, pe baza relaţiei (3.1.11) coordonatele $x_s(t)$. Ecuaţiile (3.2.1) permit determinarea reacţiilor de spijin R_s.

Observaţie: dacă forţele date admit energia potenţială U, ecuaţiile lui Lagrange (3.2.15) se pot scrie sub formă mai compactă. Pentru aceasta vom introduce **funcţia Lagrange** sau **lagrangeiana** sistemului, definită prin relaţia:

$$L \equiv E_{cin} - U \tag{3.16}$$

Astfel, ecuaţiile Lagrange capătă forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = \overline{1,l} \tag{3.17}$$

În concluzie, formalismul Lagrange oferă o metodă de rezolvare a unor probleme de mecanică care constă în:

• se stabileşte numărul gradelor de libertate şi se aleg coordonatele generalizate
• se construiesc funcţiile E_{cin}, Q_i, L
• se exprimă cele $2l$ condiţii iniţiale pentru coordonatele generalizate $q_i(t_o)$ şi vitezele generalizate $\dot{q}_i(t_o)$ $(i = \overline{1,l})$
• se integrează ecuaţiile Lagrange obţinându-se soluţia $q_i = q_i(t)$ $(i = \overline{1,l})$, se determină coordonatele $x_s(t)$ $(s = \overline{1,3N})$ şi apoi reacţiile de sprijin R_s $(s = \overline{1,3N})$

3.3 Formalismul Hamilton

3.3.1 Principiul lui Hamilton

Legile Mecanicii newtoniene, aşa cum au fost formulate de Newton şi care si-au găsit forma cea mai generală în lucrările lui Lagrange, au forma unor ecuaţii diferenţiale. Prin lucrările lui Hamilton s-a ajuns la **formularea integrală a legilor Mecanicii**.

Principiul lui Hamilton este un principiu integral al legilor Mecanicii. Pentru a vedea în ce constă acesta, vom considera un sistem de N puncte materiale supus la ν legături olonome şi perfecte.

Fie

$$x_1, x_2, x_3, ...x_s......x_{3N} \tag{3.1}$$

coordonatele carteziene ale punctelor sistemului, şi fie de asemenea

$$f_k(x_s, t) = 0 \qquad k = \overline{1, \nu} \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.2}$$

ecuaţiile care rezultă din legăturile impuse sistemului.

Vom presupune în continuare că, în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este cunoscută **mişcarea reală** a sistemului, conformă cu legile Mecanicii. Această mişcare este caracterizată prin legile de mişcare:

$$x_s = x_s(t) \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.3}$$

Este clar că această mişcare, caracterizată prin ecuaţiile (3.3.3) respectă legăturile, deci funcţiile (3.3.3) substituite în relaţiile (3.3.2), le verifică identic.

Vom considera şi o **mişcare virtuală**, deci o mişcare despre care presupunem că satisface condiţiile de legătură (3.3.2), dar nu satisface legile Mecanicii. Mişcarea virtuală este caracterizată prin relaţii de forma:

$$x'_s = x'_s(t) \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \qquad s = \overline{1, 3N} \tag{3.4}$$

De asemenea, vom presupune că la momentele de timp $t = t_1$ şi respectiv $t = t_2$, poziţiile punctelor sistemului considerat, pentru mişcarea reală şi pentru cea virtuală, coincid:

$$\begin{aligned} x_s(t_1) &= x'_s(t_1) \\ x_s(t_2) &= x'_s(t_2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

În fine, vom mai presupune că mişcările (reală şi virtuală) sunt destul de apropiate una de cealaltă, prin urmare diferenţele:

$$\delta x_s = x'_s(t) - x_s(t) \tag{3.6}$$

sunt suficient de mici, astfel încât puterile superioare puterii întâia să fie neglijate.

Se observă că, prin ipoteză, atât coordonatele x_s, cât şi coordonatele x'_s satisfac în fiecare moment relaţiile de legătură (3.3.2); rezultă atunci că mărimile δx_s reprezintă, la fiecare moment t, o deplasare virtuală. Dar, conform principiului lucrului mecanic virtual (3.2.4), dacă vom elimina reacţiile de spijin R_s, vom obţine o relaţie asemănătoare cu relaţia (3.2.6):

$$\sum_{s=1}^{3N} (m_s \ddot{x}_s - F_s) \delta x_s(t) = 0 \tag{3.7}$$

cu deosebirea că mărimile δx_s depind de timp.

Vom analiza în continuare cazul obişnuit al forţelor F_s ca forţe conservative:

$$F_s = -\nabla_s U \rightarrow \sum_{s=1}^{3N} F_s \delta x_s = -\delta U \tag{3.8}$$

Vom înlocui această ultimă relaţie în (3.3.7), apoi înmulţim cu dt şi integrăm în raport cu timpul de la t_1 la t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{s=1}^{3n} m_s \ddot{x}_s \delta x_s \right] dt = -\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt \tag{3.9}$$

care, prelucrată, şi ţinând cont şi de ipoteza (3.3.5) conduce la ecuaţia:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_{cin} - \delta U) dt = 0 \tag{3.10}$$

unde:

$$\delta E_{cin} = \delta \sum_{s=1}^{3N} \frac{1}{2} m_s \dot{x}_s^2 \tag{3.11}$$

reprezintă diferenţa dintre energia cinetică a sistemului E'_{cin} calculată pentru mişcarea virtuală (pe **traiectoria virtuală**) şi respectiv pentru mişcarea reală E_{cin} (pe **traiectoria reală**):

$$\delta E_{cin} = E'_{cin} - E_{cin} \tag{3.12}$$

Dacă vom integra relaţia (3.3.12) rezultă:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_{cin} dt = \int_{t_1}^{t_2} E'_{cin} - \int_{t_1}^{t_2} E_{cin} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} E_{cin} dt \tag{3.13}$$

Dacă vom repeta acelaşi raţionament pentru energia potenţială, relaţia (3.3.10) se poate scrie:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{cin} - U)dt = 0 \tag{3.14}$$

Această ecuaţie reprezintă expresia matematică a **principiului lui Hamilton** şi are următoarea semnificaţie. Dacă se calculează integrala:

$$\int_{t_1}^{t_2} (E_{cin} - U)dt$$

pentru mişcarea reală a sistemului şi respectiv pentru mişcarea virtuală apropiată supusă condiţiilor:

- satisface relaţiile de legătură
- coincide cu poziţiile reale la momentele t_1 şi t_2

atunci diferenţa (3.3.14) a celor două integrale este nulă.

Observaţie: această condiţie este analoagă cu condiţia de maxim sau minim (extrem) pentru o funcţie; dacă se calculează valoarea funcţiei pentru un sistem de valori date variabilelor de care depinde funcţia şi se constată că variaţia este întotdeauna nulă când ne deplasăm la un punct vecin, atunci sistemului dat de valori îi corespunde o valoare minimă sau maximă a funcţiei.

În cazul nostru funcţia este înlocuită printr-o integrală, iar variabilele independente printr-o traiectorie. Vom nota prin:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{3.15}$$

acţiunea pentru o mişcare oarecare iar $L = E_{cin} - U = L(q, \dot{q}, t)$ este funcţia Lagrange.

Deci, **principiul integral a lui Hamilton** (numit şi **principiul minimei acţiuni**) se poate formula astfel: mişcarea reală (conformă cu legile Mecanicii), în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este aceea mişcare pentru care integrala S capătă o valoare extremă (minimă sau maximă) în comparaţie cu mişcările vecine, care satisfac ecuaţiile legăturilor.

Principiul Hamilton conţine, sub formă compactă, legile mişcării sistemului de particule. Se poate arăta că satisfacerea acestui principiu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \tag{3.16}$$

este echivalentă cu cerinţa ca sistemul diferenţial

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = \overline{1, l} \tag{3.17}$$

să fie satisfăcut, sistem ce reprezintă ecuaţiile Lagrange (vezi Anexa A)

3.3.2 Ecuaţiile canonice

În formularea lagrangeiană a legilor Mecanicii, starea mecanică a unui sistem la un moment dat t este dată de valorile numerice ale coordonatelor generalizate şi vitezelor generalizate:

$$q_1, q_2, ...q_l \; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ...\dot{q}_l \tag{3.18}$$

Evoluţia în timp a stării mecanice se obţine prin integrarea ecuaţiilor Lagrange (3.3.17). În cazul cel mai simplu, în care variabilele q_i sunt chiar coordonatele carteziene ale punctelor materiale, iar q_i sunt vitezele corespunzătoare, atunci funcţia Lagrange are forma:

$$L = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - U(q_i, t) \tag{3.19}$$

unde $U(q_i, t)$ este energia potenţială a sistemului.

Un alt mod de a determina starea mecanică a unui sistem şi evoluţia acesteia în timp a fost introdus de Hamilton (1834). În formularea lui Hamilton, starea mecanică a unui sistem de puncte materiale se face cu ajutorul a $2l$ variabile: variabilele $q_1, q_2, ...q_l$ rămân coordonatele generalizate ale lui Lagrange, iar noile variabile $p_1, p_2, ...p_l$, care înlocuiesc vitezele, sunt **impulsurile generalizate** şi sunt definite prin relaţia:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = \overline{1, l} \tag{3.20}$$

În cazul cel mai simplu, în care lagrangeiana are expresia (3.3.19), impulsurile p_i au expresiile:

$$p_i = m_i \dot{q}_i \tag{3.21}$$

şi se mai numesc **impulsurile conjugate variabilelor de poziţie** q_i.

Pentru a determina legile de evoluţie a sistemului , vom introduce funcţia H de variabilele de stare, definită prin relaţia:

$$H \equiv \sum_{i=1}^{l} p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(p_i, \dot{q}_i, t) \tag{3.22}$$

numită **funcţia hamiltoniană** a sistemului sau, pe scurt, **hamiltoniana sistemului**. Dacă vom diferenţia ambii membrii ai relaţiei (3.3.22), faţă de toate variabilele de stare, precum şi de timp, obţinem:

$$dH = \sum_{i=1}^{l} \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^{l} p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.23)$$

Dacă vom ţine cont şi de definiţia impulsului generalizat (3.3.20), atunci diferenţiala hamiltonianei (3.3.23) se va scrie sub forma:

$$dH = \sum_{i=1}^{l} \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.24)$$

care, comparată cu expresia diferenţialei matematice a funcţiei $H(p_i, \dot{q}_i, t)$:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (3.25)$$

conduce la următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial L}{dq_i} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dacă vom ţine cont de ecuaţiile Lagrange precum şi de definiţia impulsului generalizat, primele două ecuaţii din relaţia (3.3.26)

capătă forma:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i = \overline{1, l} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Aceste ecuaţii (3.3.27) reprezintă **ecuaţiile lui Hamilton** sau **ecuaţiile canonice ale Mecanicii** şi care determină evoluţia în timp a stării mecanice a sistemului. Ele sunt complet echivalente cu ecuaţiile lui Lagrange, dar prezintă următoarele avantaje:

• sunt ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi spre deosebire de ecuaţiile lui Lagrange care sunt de ordinul doi, dar numărul lor este dublu
• sunt rezolvate faţă de derivatele în raport cu timpul ale variabilelor canonice p_i, q_i

Conform formalismului lui Hamilton se poate descrie starea mecanică a unui sistem de puncte materiale prin $2l$ coordonate canonice. Dacă asociem acestor $2l$ variabile un spaţiu matematic $2l$ dimensional, vom obţine aşa numitul **spaţiul fazelor** în care $q_i = q_i(t)$ şi $p_i = p_i(t)$ reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei din acest spaţiu.

3.3.3 Semnificaţia funcţiei hamiltoniană

În cazul cel mai simplu, în care lagrangeiana are forma (3.3.19), vom avea, conform definiţiei:

$$H = \sum_{i=1}^{l} m_i \dot{q}_i^2 - L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} m_i \dot{q}_i^2 + U(q_i, t) \tag{3.28}$$

deci, hamiltoniana este suma energiilor cinetică şi potenţială ale sistemului, adică **energia totală** a sistemului de puncte materiale supus la legături olonome şi perfecte. Aceeaşi semnificaţie se obţine şi în cazul **legăturilor scleronome** care sunt legături independente de timp.

Dacă însă legăturile impuse sistemului depind explicit de timp (**legături reonome**), atunci în expresia energiei cinetice apar şi termeni de gradul întâi faţă de vitezele generalizate, iar hamiltoniana nu mai coincide cu energia totală a sistemului.

3.3.4 Parantezele lui Poisson

Forma canonică (3.3.27) a ecuaţiilor de mişcare ne permite să determinăm legea de variaţie în timp a oricărei mărimi care depinde de starea mecanică a sistemului. Fie $f(p_i, q_i, t)$ o astfel de mărime. Variaţia totală a acestei mărimi atunci când timpul creşte cu dt este:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \tag{3.29}$$

Dacă vom înlocui derivatele variabilelor canonice prin valorile lor date de ecuaţiile canonice, se obţine:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{3.30}$$

Suma care apare în membrul al doilea al acestei relaţii se numeşte **paranteza Poisson** a mărimilor H şi f şi se notează:

$$\{H, f\} = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{3.31}$$

În general se defineşte paranteza Poisson pentru două mărimi oarecare f şi g:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \tag{3.32}$$

sume care se întâlnesc frecvent în probleme de Mecanică tratate cu ajutorul ecuaţiile canonice.

Parantezele Poisson se bucură de următoarele proprietăţi care rezultă din definiţia lor generală (3.3.32):

• antisimetrie: $\{f,g\} = -\{g,f\}$
• liniaritate faţă de fiecare partener: $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\}$
• parantezele Poisson ale variabilelor canonice au valorile:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \tag{3.33}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \tag{3.34}$$

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \tag{3.35}$$

unde δ_{ij} este **simbolul lui Kr$\ddot{o}$nneker**, $\delta_{ij} = 1$ pentru $i = j$ şi $\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$.
• între parantezele Poisson a trei mărimi f, g şi h este respectată **identitatea Jacobi**:

$$\{f, \{g,h\}\} + \{g, \{h,f\}\} + \{h, \{f,g\}\} \equiv 0 \tag{3.36}$$

Revenind asupra relaţiei (3.3.30), legea de variaţie în timp a unei funcţii f se poate scrie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{3.37}$$

Dacă vom alege energia totală a sistemului ca fiind mărimea mecanică $f \equiv H$ atunci variaţia în timp a hamiltonianei este:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.38}$$

Un caz special este acela pentru care hamiltoniana nu conţine explicit timpul, adică $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Rezultă:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{3.39}$$

ceea ce exprimă, în cazurile în care hamiltoniana este tocmai energia totală a sistemului, **legea de conservare a energiei**.

3.3.5 Transformările canonice

Alegerea convenabilă a variabilelor care descriu starea de mişcare a unui sistem, în problemele de mecanică, poate aduce simplificări considerabile. Fie un sistem de puncte materiale, cu l grade de libertate a cărui mişcare este caracterizată de ecuaţiile canonice:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ & \qquad\qquad i = \overline{1, l} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Să urmărim cum se transformă aceste ecuaţii dacă asupra variabilelor facem o schimbare de forma:

$$\begin{aligned} p'_i &= p'_i(p_i, q_i, t) \\ q'_i &= q'_i(p_i, q_i, t) \end{aligned} \tag{3.41}$$

unde funcţiile admit derivate parţiale de ordinul doi, continue.

Condiţia necesară şi suficientă ca şi variabilele p_i şi q_i să poată fi exprimate în funcţie de variabilele p'_i şi q'_i este ca jacobianul variabilelor p'_i, q'_i faţă de variabilele p_i, q_i să fie diferit de zero:

$$J \equiv \frac{\partial(p'_1, p'_2, ...p'_l; q'_1, q'_2, ...q'_l)}{\partial(p_1, p_2, ...p_l; q_1, q_2, ...q_l)} \neq 0 \tag{3.42}$$

Observaţie: dacă diferenţiem relaţia (3.3.41), obţinem:

$$\begin{aligned} dp'_i - \frac{\partial p'_i}{\partial t}dt &= \frac{\partial p'_i}{\partial p_j}dp_j + \frac{\partial p'_i}{\partial q_j}dq_j \\ & \qquad\qquad i = \overline{1,l} \quad j = \overline{1,l} \\ dq'_i - \frac{\partial q'_i}{\partial t}dt &= \frac{\partial q'_i}{\partial p_j}dp_j + \frac{\partial q'_i}{\partial q_j}dq_j \end{aligned} \tag{3.43}$$

din care se observă că jacobianul J este tocmai determinantul mambrilor din partea dreaptă a relaţiei (3.3.43).

Să considerăm în continuare ecuaţiile canonice scrise în noile variabile:

$$\begin{aligned} \dot{q}'_i &= \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \\ & \qquad H' = H'(p'_i, q'_i, t) \quad i = \overline{1,l} \\ \dot{p}'_i &= -\frac{\partial H'}{\partial q'_i} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Pentru ca ecuaţiile de mişcare scrise în variabilele p'_i, q'_i să aibe forma canonică (3.3.44) trebuie impuse anumite restricţii transformării (3.3.41). Restricţia care se impune se numeşte **condiţia**

de canonicitate şi este următoarea:

$$(p_i dq_i - H dt) - (p'_i dq'_i - H' dt) = dF(p_i, q_i, t) \qquad i = \overline{1, l} \quad (3.45)$$

unde $F(p_i, q_i, t)$ se numeşte **funcţie generatoare** a transformării (3.3.41). Dacă condiţia (3.3.45) este satisfăcută , vom spune că transformarea (3.3.41) este o **transformare canonică**.

Să considerăm în continuare două mărimi mecanice oarecare f şi g. Se poate demonstra că parantezele Poisson ale celor două mărimi scrise faţă de variabilele p_i, q_i şi respectiv p'_i, q'_i sunt egale, cu condiţia ca ca cele două sisteme de variabile să derive unul din celălalt printr-o transformare canonică:

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{p',q'} \qquad (3.46)$$

Această proprietate se numeşte **invarianţa parantezelor lui Poisson la transformările canonice**.

3.3.6 Ecuaţia lui Hamilton-Jacobi

Scopul transformărilor canonice este trecerea de la sistemul de mişcare (3.3.27) la un sistem transformat (3.3.44) care să aibe o formă cât mai simplă. Dar forma cea mai simplă pe care o poate avea un sistem canonic corespunde cazului în care hamiltoniana H' este identic nulă. În acest caz, sistemul canonic (3.3.44) se reduce la:

$$\dot{q}'_i = 0 \qquad (3.47)$$

$$\dot{p}'_i = 0 \qquad (3.48)$$

deci variabilele q'_i, p'_i sunt constante în timp. O astfel de transformare se poate obţine dacă se utilizează o funcţie S generatoare a transformării, care satisface ecuaţiile:

$$p_i = \frac{\partial S(p', q, t)}{\partial q_i} \tag{3.49}$$

$$q'_i = \frac{\partial S(p', q, t)}{\partial p'_i} \tag{3.50}$$

$$H' - H = \frac{\partial S(p', q, t)}{\partial t} \tag{3.51}$$

Anularea hamiltonianului H' implică, conform relaţiei (3.3.51):

$$\frac{\partial S(p', q, t)}{\partial t} + H(p, q, t) = 0 \tag{3.52}$$

Dacă vom înlocui în hamiltoniana $H(p, q, t)$ variabilele p prin expresiile date de (3.3.49), se obţine, pentru funcţia generatoare S a transformării, ecuaţia:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0 \tag{3.53}$$

cunoscută sub numele de **ecuaţia Hamilton-Jacobi**.

Ecuaţia Hamilton-Jacobi este o ecuaţie cu derivate parţiale pentru funcţia S. Pentru determinarea mişcării sistemului este necesar să se determine o soluţie a acestei ecuaţii. O astfel de soluţie se numeşte **integrală completă** a ecuaţiei (3.3.53). Această ecuaţie este echivalentă cu sistemul canonic şi deci reprezintă o exprimare echivalentă a legilor mişcării pentru sistemul mecanic considerat.

Observaţie: Funcţia generatoare S din ecuaţia Hamilton-Jacobi este chiar **acţiunea** din formalismul Lagrange şi are dimensiunea de energie×timp.

3.4 Probleme

3.1 Să se găsească ecuaţiile diferenţiale de mişcare pentru o particulă de masă m sub acţiunea unui forţe atractive invers proporţională cu pătratul distanţei, de tipul $F = -\frac{k}{r^2}, k > 0$:

a). cu ajutorul formalismului Lagrange;
b). cu ajutorul formalismului Hamilton.

Rezolvare:

Considerăm drept coordonate generalizate coordonatele polare (r, θ). Deci:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \\ q_2 &= \theta \end{aligned}$$

Legăturile dintre aceste coordonate şi coordonatele carteziene x, y sunt date de relaţiile:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Energia cinetică are expresia:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

Energia potenţială se determină conform relaţiei de definiţie:

$$U = -\int_{\infty}^{r}\left(-\frac{k}{r^2}\right)dr = -\frac{k}{r}$$

a. Lagrangeianul acestei mişcări se scrie sub forma:

$$L = E_{cin} - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r}$$

iar ecuaţiile Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

devin:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0
\end{aligned}$$

După efectuarea derivatelor din aceste ecuaţii se obţine:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\
\frac{\partial L}{\partial r} &= mr^2\dot{\theta} - \frac{k}{r^2} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0
\end{aligned}$$

Ca urmare:

$$m\ddot{r} = mr^2\dot{\theta} + \frac{k}{r^2}$$
$$2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = 0$$

Se observă că s-au obţinut două ecuaţii diferenţiale de ordinul doi. Din prima ecuaţie diferenţială rezultă:

$$\ddot{r} - r^2\dot{\theta} - \frac{k}{r^2} = 0$$

iar a doua ecuaţie diferenţială se poate se poate scrie sub forma restrânsă:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) &= 0 \Rightarrow \\ J &= mr^2\dot{\theta} = const. \end{aligned}$$

Mişcarea sub acţiunea unei forţe invers proporţionale cu pătratul distanţei (**forţă de tip central**) are loc în aşa fel încât momentul unghiular J se conservă. Direcţia rămâne constantă în timp, ca urmare mişcarea particulei are loc în permanenţă în acelaşi plan.

b. Să introducem impulsurile generalizate:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned}$$

Funcţia lui Hamilton devine:

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta - L = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \frac{k}{r} \end{aligned}$$

Ecuaţiile canonice ale mişcării sunt:

$$
\begin{aligned}
-\dot{p}_r &= \frac{\partial H}{\partial r} \Rightarrow \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{2mr^3} - \frac{k}{r^2} \\
-\dot{p}_\theta &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow \dot{p}_\theta = 0 \\
\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\
\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}
\end{aligned}
$$

S-au obţinut patru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi (mai uşor de integrat decât cele din reprezentarea Lagrange!). Deoarece coordonata θ nu apare în mod explicit în expresia hamiltonianului ea este o **coordonată ciclică**. Impulsul generalizat asociat acestei variabile este o integrală a mişcării:

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = const.$$

3.2 Energia cinetică a unui corp de masă m în coordonate polare plane (r, θ) este:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Care sunt forţele generalizate corespunzătoare acestor coordonate?

Rezolvare:

Forţele generalizate se calculează cu ajutorul formulei:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_{cin}}{\partial q_i}$$

Deoarece:

$$q_1 = r; \quad q_2 = \theta$$

se obţine:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial E_{cin}}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m(r\dot{\theta}^2) \\ Q_2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_{cin}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \end{aligned}$$

3.3 Să se scrie ecuaţiile de mişcare Lagrange pentru pendulul dublu din Fig. 3.3 ce execută oscilaţii în acelaşi plan. Se consideră $m_1 = m_2 = m$ şi $l_1 = l_2 = l$

Rezolvare:

Sistemul are două grade de libertate. Considerăm drept coordonate generalizate $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$. Din Fig. 3.3 se observă că:

$$\begin{aligned} x_1 &= l\sin\theta_1 \\ y_1 &= l\cos\theta_1 \\ x_2 &= l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2 \\ y_2 &= l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 \end{aligned}$$

Energia potenţială a sistemului este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele ce acţionează asupra celor două corpuri luat cu

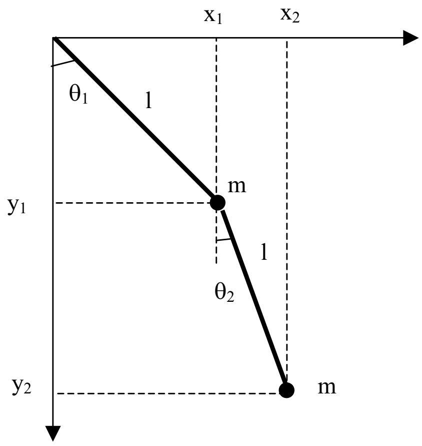


Fig. 3.3

semn schimbat. Pentru o deplasare infinitezimală:

$$\begin{aligned} dU &= -(\vec{G}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{G}_2 \cdot d\vec{r}_2) \\ &= -mgdy_1 - mgdy_2 \end{aligned}$$

Considerând ca nivel de referinţă planul $y = 0$ căruia îi atribuim, prin convenţie, valoarea zero energiei potenţiale, se obţine după integrare:

$$\begin{aligned} U &= -mgy_1 - mgy_2 \\ &= -mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \end{aligned}$$

Pentru a determina energia cinetică a sistemului avem nevoie de

expresiile vitezelor:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{\theta}_1 l \cos\theta_1 \\
\dot{y}_1 &= -\dot{\theta}_1 l \sin\theta_1 \\
\dot{x}_2 &= \dot{\theta}_1 l \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2 l \cos\theta_2 \\
\dot{y}_2 &= -\dot{\theta}_1 l \sin\theta_1 - \dot{\theta}_2 l \cos\theta_2
\end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\begin{aligned}
E_{cin} &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\theta}_1^2 l^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}_1^2 l^2 + \dot{\theta}_2^2 l^2 + 2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]
\end{aligned}$$

Funcţia Lagrange devine:

$$\begin{aligned}
L &= E_{cin} - U = \frac{1}{2}m\dot{\theta}_1^2 l^2 + \\
&\quad \frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}_1^2 l^2 + \dot{\theta}_2^2 l^2 + 2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + \\
&\quad +mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)
\end{aligned}$$

Calculăm în continuare derivatele implicate în ecuaţiile Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= 2m\dot{\theta}_1 l^2 + ml^2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= 2m\ddot{\theta}_1 l^2 - ml^2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad +ml^2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mgl\sin\theta_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m\dot{\theta}_2 l^2 + ml^2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= m\ddot{\theta}_2 l^2 + ml^2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \\
&\quad -ml^2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mgl\sin\theta_2
\end{aligned}$$

Ecuaţiile Lagrange, după simplificarea prin ml sunt:

$$\begin{aligned}
2\ddot{\theta}_1 l - l\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2) + l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + & \\
+l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g\sin\theta_1 &= 0 \\
\ddot{\theta}_2 l + l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - l\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2) + & \\
+l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g\sin\theta_2 &= 0
\end{aligned}$$

3.4 Se consideră un punct material de masă m în câmp gravitaţional, constrâns să se mişte, fără frecare, în interiorul unui con de unghi α.

a). Câte grade de libertate are sistemul? Alegeţi un sistem de cordonate generalizate.
b). Determinaţi energia cinetică în sistemul de coordonate generalizate ales.
c). Scrieţi energia potenţială în sistemul de coordonate generalizate ales.
d). Scrieţi ecuaţiile Lagrange corespunzătoare.

Rezolvare:

a. Descrierea mişcării pe un con necesită alegerea sistemului

de coordonate cilindric (r, φ, z) (Fig. 3.4). Dar, datorită constrângerii legate de mişcarea doar pe suprafaţa conului:

$$r = ztg\alpha$$

numărul de coordonate independente necesare pentru studiul mişcării (adică numărul gradelor de libertate) este:

$$n = 3 - 1 = 2$$

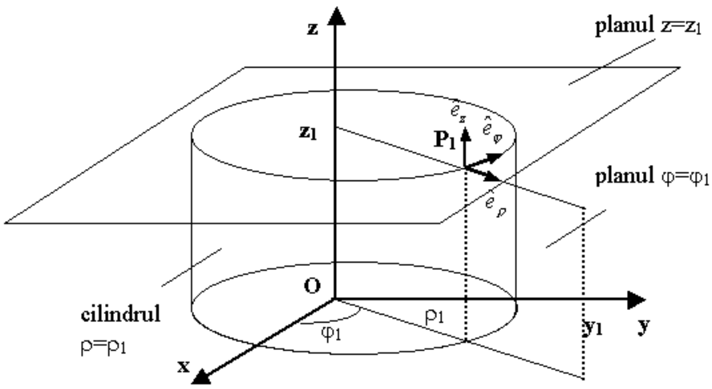


Fig. 3.4

Drept coordonate generalizate se pot alege grupurile : (r, φ) sau (z, φ).

b. Poziţia particulei este descrisă în orice moment de timp de gruparea $(r,\varphi, r/tg\varphi)$. Folosim relaţiile de transformare de la un

sistem cartezian (x, y, z) la acest sistem de coordonate.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi \\ y &= r\cos\varphi \\ z &= rctg\alpha \end{aligned}$$

Derivarea în raport cu timpul conduce la relaţiile:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{z} &= \frac{\dot{r}}{tg\alpha} \end{aligned}$$

Energia cinetică devine:

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{tg^2\alpha}\right) \end{aligned}$$

c. Corpul se mişcă în câmp gravitaţional care este un câmp conservativ, energia potenţială corespunzătoare fiind:

$$U = mgz + U_0$$

Vom considera drept referinţă planul $z = 0$ căruia îi vom atribui prin convenţie valoarea zero pentru energia potenţială: $U_0 = 0$. Deci:

$$U = mg\frac{r}{tg\alpha}$$

d. Lagrangeiana sistemului este:

$$\begin{aligned} L &= E_{cin} - U \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{tg^2\alpha}\right) - mg\frac{r}{tg\alpha} \end{aligned}$$

Ecuaţiile Lagrange corespunzătoare sunt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Calculăm mai întâi derivatele implicate în prima ecuaţie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}\left(1 + ctg^2\alpha\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) &= m\ddot{r}\left(1 + ctg^2\alpha\right) \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - mgctg\alpha \end{aligned}$$

Prima ecuaţie Lagrange, după simplificarea prin m devine:

$$\ddot{r}\left(1 + ctg^2\alpha\right) - r\dot{\varphi}^2 + gctg\alpha = 0$$

Repetăm procedura pentru cea de-a doua ecuaţie Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr\dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= m\dot{r}\dot{\varphi} + mr\ddot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Deoarece variabila φ nu intră în expresia funcţiei Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = mr\dot{\varphi} = J_z = const.$$

Mişcarea are loc în aşa fel încât se conservă cantitatea $mr\dot{\varphi}$ care reprezintă momentul unghiular pe direcţia Oz. Această relaţie permite reducerea încă a unei variabile din ecuaţia generală a mişcării găsite din ecuaţia Lagrange pentru variabila r.

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr}$$

$$\ddot{r}\left(1 + ctg^2\alpha\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{p_\varphi}{m}\right)^2 + gctg\alpha = 0$$

Ultima ecuaţie obţinută este o ecuaţie diferenţială în variabila r.

3.5 Un pendul matematic cu masa m_2 este suspendat de o bară rigidă şi foarte uşoară de lungime$l$. La rândul ei, bara este prinsă de un corp de masă $m_1$agăţat de un resort cu constanta elastică k (vezi Fig. 3.5). Se presupune că mişcarea sistemului are loc doar în planul figurii.

a). Să se construiască lagrangeiana sistemului $L = L(y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta})$;
b). Să se scrie ecuaţiile Lagrange.

Rezolvare:

a. Coordonatele generalizate ale sistemului sunt distanţa măsurată pe verticală de la originea sistemului xşi unghiul de deviere în plan vertical θ. Se poate scrie:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= y \\ x_2 &= l\sin\theta \\ y_2 &= y + l\cos\theta \end{aligned}$$

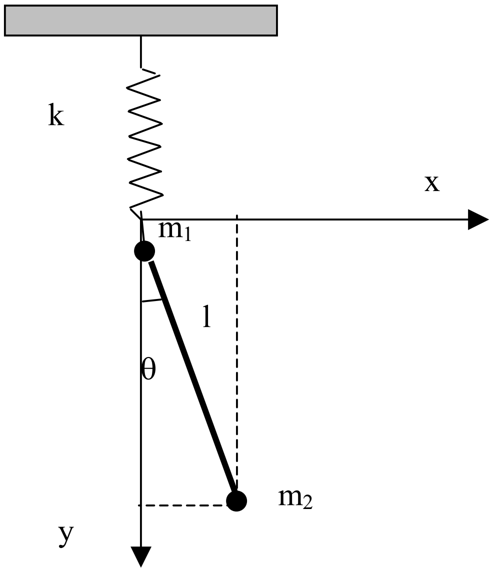


Fig. 3.5

Energia cinetică a sistemului este:

$$
\begin{aligned}
E_{cin} &= \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \left(\dot{y} - l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta\right]
\end{aligned}
$$

Energia potenţială se compune din contribuţia dată de forţa elastică ce apare în resortul deformat şi din cea determinată de forţele gravitaţionale:

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{1}{2}ky_1^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2 \\
&= \frac{1}{2}ky^2 - m_1gy - m_2g(y + l\cos\theta)
\end{aligned}
$$

Aşadar funcţia Lagrange este:

$$
\begin{aligned}
L &= E_{cin} - U = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{y}\sin\theta\right] + \\
&\quad -\frac{1}{2}ky^2 + m_1gy + m_2g(y + l\cos\theta)
\end{aligned}
$$

b. Ecuaţiile Lagrange sunt:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0
\end{aligned}
$$

Derivatele implicate în aceste ecuaţii sunt:

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} - m_2l\dot{\theta}\sin\theta
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) &= (m_1+m_2)\ddot{y} - m_2 l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -ky + (m_1+m_2)g \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_2 l(l\dot{\theta} - \dot{y}\sin\theta) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= m_2 l^2\ddot{\theta} - m_2 l(\ddot{y}\sin\theta + \dot{y}\dot{\theta}\cos\theta) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m_2 l\dot{\theta}\dot{y}\cos\theta - m_2 gl\sin\theta
\end{aligned}
$$

După înlocuirea corespunzătoare se obţin următoarele ecuaţii:

$$
\begin{aligned}
(m_1+m_2)(\ddot{y}-g) - m_2 l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + ky &= 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{1}{l}(g-\ddot{y})\sin\theta &= 0
\end{aligned}
$$

3.6 Un corp de masă m încărcat cu sarcina electrica e se mişcă cu viteza $\vec{v}$ într-un câmp electromagnatic, descris de potenţialul vector $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ şi de potenţialul scalar $\varphi(\vec{r})$. Funcţia Lagrange a acestei mişcări este:

$$
L = \frac{mv^2}{2} + e\vec{v}\cdot\vec{A} - \varphi(\vec{r})
$$

Să se determine energia cinetică a particulei.

Rezolvare:

Energia cinetică a mişcării este:

$$E_{cin} = \sum_{k=1}^{3} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

unde:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{x} = v_x \\ \dot{q}_2 &= \dot{y} = v_y \\ \dot{q}_3 &= \dot{x} = v_z \end{aligned}$$

Expresia dezvoltată a funcţiei Lagrange se scrie sub forma:

$$L = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + e(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) - \varphi(\vec{r})$$

Deoarece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_x} &= m v_x + e A_x \\ \frac{\partial L}{\partial v_y} &= m v_y + e A_y \\ \frac{\partial L}{\partial v_z} &= m v_z + e A_z \end{aligned}$$

expresia energiei cinetice devine:

$$\begin{aligned} E_{cin} &= v_x \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_y \frac{\partial L}{\partial v_y} + v_z \frac{\partial L}{\partial v_z} - L \\ &= m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + e(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) - \\ &\quad - \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) - e(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) + \varphi(\vec{r}) \\ &= \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

3.7 Se ştie că funcţia Hamilton a unei particule este:

$$H = ap^2 + bx^2 + cx$$

unde $x-$ coordonata particule, $p-$ impulsul iar $a, b, c-$ constante reale pozitive. Să se determine:

a) ecuaţia diferenţială de mişcare a particulei;
b) paranteza Poisson dintre lagrangeiana şi hamiltoniana sistemului {L,H}

Rezolvare:

a. Din ecuaţiile lui Hamilton rezultă:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = 2ap \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -2bx - c \end{aligned}$$

Derivând din nou prima relaţie şi folosind-o pe a doua se elimină impulsul.

Ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$\ddot{x} + 4abx + 2ac = 0$$

b. Funcţia Lagrange este conform definiţiei:

$$L = p\dot{x} - H = p\dot{x} - ap^2 - bx^2 - cx$$

Vom folosi în continuare proprietăţile parantezelor Poisson.

$$\begin{aligned}\{L,H\} &= \{p\dot{x}-H,H\}=\{p\dot{x},H\}=\{2ap^2,H\}=2a\{p^2,H\}\\ &= 2a\{p^2,ap^2+bx^2+cx\}\\ &= 2a\left[\{p^2,ap^2\}+\{p^2,bx^2\}+\{p^2,cx\}\right]\\ &= 2a\left[b\{p^2,x^2\}+c\{p^2,x\}\right]\end{aligned}$$

deoarece:

$$\{p^2,ap^2\}=a\{p^2,p^2\}=0$$

Folosim următoarele rezultate:

$$\begin{aligned}\{p,x\} &= \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)=1\\ \{p^2,x\} &= p\{p,x\}+\{p,x\}p=2p\{p,x\}=2p\\ \{p^2,x^2\} &= 2p\{p,x^2\}=-2p\{x^2,p\}=-4px\{x,p\}\\ &= 4px\{p,x\}=4px\end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\{p,x^2\}=8abpx+4acp$$

3.8 Să se deducă legea de mişcare a unui oscilator liniar armonic de masă m şi constantă elastică k, cu ajutorul formalismului Hamilton-Jacobi.

Rezolvare:

Vom folosi ecuaţia Hamilton-Jacobi:

$$H+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

Funcţia Hamilton pentru un oscilator liniar armonic este:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

iar

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}$$

Revenim în ecuaţia Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Încercăm să găsim soluţia ecuaţiei diferenţiale separând contribuţia care depinde doar de coordonată de cea care depinde doar de timp.

$$S = S_1(x) + S_2(t)$$

După verificarea soluţiei rezultă:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1(x)}{dx}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} = -\frac{dS_2(t)}{dt}$$

Relaţia este adevărată doar dacă fiecare membru al ecuaţiei este egal cu o constantă, pe care să o notăm β.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1(x)}{dx}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} &= \beta \\ \frac{dS_2(t)}{dt} &= -\beta \end{aligned}$$

După rezolvarea primei ecuaţii rezultă:

$$\frac{dS_1(x)}{dx} = \sqrt{2m\left(\beta - \frac{kx^2}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} dS_1(x) &= \sqrt{2m\left(\beta - \frac{kx^2}{2}\right)}dx \\ S_1(x) &= \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{kx^2}{2}\right)}dx + S_{10} \end{aligned}$$

După rezolvarea celei de a doua ecuaţie rezultă:

$$\begin{aligned} dS_2(t) &= -\beta dt \\ S_2(t) &= -\beta t + S_{20} \end{aligned}$$

Ca urmare, acţiunea este, până la o constantă $S_{10} + S_{20}$ pe care o considerăm egală cu zero:

$$S = \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{kx^2}{2}\right)}dx - \beta t$$

Considerăm că β este o nouă coordonată a sistemului care joacă rol de impuls. Atunci se poate defini şi o nouă coordonată de poziţie corespunzătoare, prin relaţia:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \beta}$$

Deci:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\int \sqrt{\left(\beta - \frac{kx^2}{2}\right)}dx - \beta t\right] \\ &= \frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\beta - \frac{kx^2}{2}}} - t \end{aligned}$$

Această relaţie se poate rearanja şi apoi integra ţinând cont de faptul că noua coordonată gereralizată introdusă este o constantă. Să o notăm cu γ.

$$\frac{\sqrt{2m}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\beta-\frac{kx^2}{2}}}=\gamma+t$$

După integrare se obţine:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\right) &= \gamma+t\\ \sin\left(x\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\right) &= \sqrt{\frac{k}{m}}(\gamma+t)\end{aligned}$$

sau:

$$x=\sqrt{\frac{2\beta}{k}}\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(\gamma+t)\right]$$

Constantele β,γ se determină din condiţiile iniţiale.

Capitolul 4

Mecanica cuantică

4.1 Aparatul matematic al Mecanicii cuantice

4.1.1 Spaţii liniar complexe

Formalismul Mecanicii cuantice foloseşte teoria spaţiilor Hilbert şi a operatorilor liniari care acţionează în aceste spaţii. Vom prezenta în continuare definiţiile acestor concepte necesare pentru formularea principiilor Mecanicii cuantice.

Prin definiţie, un **spaţiu liniar (sau spaţiu vectorial)** este o mulţime de elemente, denumite vectori, pentru care sunt definite două operaţii fundamentale - adunarea vectorilor şi înmulţirea cu numere complexe, operaţii care conduc tot la elemente ale mulţimii şi care satisfac anumite axiome (prezentate mai jos). Elementele spaţiului sunt notate cu ajutorul parantezelor ”$| \ >$” care încadrează simboluri literare sau numerice, şi au primit denumirea de **vectori ”ket”**. Atât notaţia cât şi denumirea se

datoresc lui Dirac.

Fie doi vectori $|\varphi_1>$ şi $|\varphi_2>$ ai unui spaţiu liniar. Prin operaţia de **adunare**, notată cu "+", cei doi vectori sunt puşi în corespondenţă cu un al treilea vector $|\varphi_3>$ al aceluiaşi spaţiu, notat cu $|\varphi_3>=|\varphi_1>+|\varphi_2>$. Prin operaţia de **înmulţire cu un număr complex** α, fiecărui vector $|\varphi>$ îi corespunde un alt vector al aceluiaşi spaţiu, notat cu $\alpha|\varphi>$. Operaţiile de adunare a vectorilor şi înmulţire cu un număr satisfac următoarele axiome:

1. Axiome referitoare la operaţia de adunare a vectorilor

• $|\varphi_1>+|\varphi_2>=|\varphi_2>+|\varphi_1>$ (**comutativitate**)

• $(|\varphi_1>+|\varphi_2>)+|\varphi_3>=|\varphi_1>+(|\varphi_2>+|\varphi_3>)$ (**asociativitate**)

• există **vectorul nul**, notat $|0>$, cu proprietatea $|\varphi>+|0>=|\varphi>$

• pentru orice element $|\varphi>$ există un element, notat $|\varphi_{op}>$ şi numit **opusul** său, astefl încât $|\varphi>+|\varphi_{op}>=|0>$

2. Axiome referitoare la operaţia de înmulţire a vectorilor cu numere

• înmulţirea cu numărul 1 se face astfel: $1|\varphi>=|\varphi>$

• înmulţirea cu un produs de numere este dată de: $(\alpha\beta)|\varphi>=\alpha(\beta|\varphi>)$

3. Axiome referitoare la combinarea celor două operaţii

• $(\alpha+\beta)|\varphi>=\alpha|\varphi>+\beta|\varphi>$

• $\alpha(|\varphi_1>+|\varphi_2>)=\alpha|\varphi_1>+\alpha|\varphi_2>$

Menţionăm în continuare următoarele **consecinţe** ale axiomelor, de care se va face uz în utilizarea elementelor spaţiilor liniare:

• vectorul zero $|0>$ este unic

• prin înmulţirea cu numărul 0 se obţine vectorul nul: $0|\varphi>=|0>$

• vectorul opus fiecărui element $|\varphi>$ este dat de relaţia: $|\varphi_{op}>=(-1)|\varphi>=-|\varphi>$

• prin înmulţirea vectorului nul $|0>$ cu orice număr, se obţine întotdeauna vectorul nul: $\alpha|0>=|0>$

Prin definiţie, două spaţii vectoriale sunt **izomorfe** dacă între ele se poate stabili o corespondenţă biunivocă, în aşa fel încât, dacă $|\varphi_1>$, $|\chi_1>$, doi vectori ce aparţin spaţiului vectorial V_1 sunt în corespondenţă cu vectorii $|\varphi_2>$ şi $|\chi_2>$ ce aparţin spaţiului V_2, atunci în corespondenţă biunivocă sunt şi elementele $\alpha|\varphi_1>$ cu $\alpha|\varphi_2>$ şi $|\varphi_1>+|\chi_1>$ cu $|\varphi_2>+|\chi_2>$.

De asemenea, se spune că o mulţime (finită sau infinită) de vectori **subântinde un spaţiu** S al unui spaţiu vectorial, dacă orice vector din S este o combinaţie liniară de vectori din această

mulţime. Noţiunea cea mai importantă într-un spaţiu liniar este cea de **dependenţă liniară**. Un set de k vectori este **liniar-independent** dacă egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i |\varphi_i >= |0 > \tag{4.1}$$

implică $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,k}$. Dacă în egalitatea (4.1.1) nu toare numerele α_i sunt nule, atunci vectorii $|\varphi_i >$ sunt **liniari-dependenţi**. Conform acestei definiţii, orice mulţime de vectori care conţine vectorul nul $|0 >$ formează un sistem de vectori liniar-dependenţi.

Dacă într-un spaţiu vectorial nu se pot găsi mai mult de n vectori liniari-independenţi, spaţiul este prin definiţie **n-dimensional**. Tot prin definiţie, orice set de n vectori liniari-independenţi într-un spaţiu n-dimensional formează o **bază** a spaţiului. Se demonstrează că orice vector $|\psi >$ al spaţiului se poate exprima (în mod unic) ca o combinaţie liniară de vectorii $|e_1 >$, $|e_2 >, ...|e_n >$ ai unei baze date a spaţiului:

$$|\psi >= \sum_{k=1}^{n} c_k |e_k > \tag{4.2}$$

Un exemplu simplu îl constituie spaţiul notat cu C^n, **prototipul tuturor spaţiilor finit-dimensionale**, ale cărui elemente sunt totalitatea seturilor de n numere complexe (n fixat). Este comod să se plaseze cele n numere într-o coloană, de exemplu:

$$|x >= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad |y >= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Prin definiţie, vectorii de tipul considerat se adună după regula:

$$|x> + |y> \equiv \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

şi se înmulţesc cu un număr complex α după regula:

$$\alpha|x> = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Cea mai simplă bază în acest spaţiu o formează vectorii:

$$|e_1> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |e_2> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{..........} |e_n> = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

În formula de descompunere (4.1.2) a unui vector oarecare după vectorii bazei (4.1.6), coeficienţii sunt chiar numerele x_k ($k = \overline{1, n}$). Spaţiul C^n este important deoarece toate spaţiile complexe n-dimensionale sunt izomorfe cu spaţiul C^n.

4.1.2 Spaţii unitare şi spaţii Hilbert

Un spaţiu unitar (sau **euclidian)** este un spaţiu vectorial în care este definit **produsul scalar**. Notăm deocamdată produsul scalar al vectorilor $|\varphi_1>$ şi $|\varphi_2>$ prin $(|\varphi_1>, |\varphi_2)$. Prin definiţie,

produsul scalar **este numărul complex** asociat unei perechi ordonate de vectori şi care satisface axiomele:

• $(|\varphi>, |\varphi) > 0$ pentru orice $|\varphi> \neq |0>$, $(|\varphi>, |\varphi) = 0 \leftrightarrow |\varphi> = |0>$

• $(|\varphi>, |\chi>) = (|\chi>, |\varphi>)^*$ ($*$ reprezintă complex conjugatul unei mărimi)

• $(|\varphi_3>, \alpha_1|\varphi_1> +\alpha_2|\varphi_2>) = \alpha_1(|\varphi_3>, |\varphi_1>) + \alpha_2(|\varphi_3>, |\varphi_2>)$

A treia proprietate exprimă liniaritatea produsului scalar în al doilea factor. Dacă se combină proprietăţile a treia cu a doua, rezultă antiliniaritatea produsului scalar în primul factor:

• $(\alpha_1|\varphi_1> +\alpha_2|\varphi_2>, |\varphi_3>) = \alpha^*(|\varphi_1>, |\varphi_3>) + \alpha_2^*(|\varphi_2>, |\varphi_3>)$

Definim **norma** (sau **lungimea unui vector**) numărul real:

$$||\varphi|| = \sqrt{(|\varphi>, |\varphi>)} \tag{4.7}$$

deci, spaţiul euclidian este un spaţiu normat. Doi vectori ai unui spaţiu unitar sunt **ortogonali** dacă:

$$(|\varphi_1>, |\varphi_2>) = 0 \tag{4.8}$$

iar o mulţime de vectori constituie un **sistem ortogonal de vectori** dacă oricare doi vectori din mulţime sunt reciproc ortogonali. Un sistem ortogonal de vectori este un **sistem ortonormat** dacă fiecare vector din sistem este normat, iar norma este finită.

O proprietate fundamentală a produsului scalar o constituie **inegalitatea Schwarz-Cauchy**:

$$|(\varphi >, |\chi >)| \leq ||\varphi||\ ||\chi|| \tag{4.9}$$

semnul egal realizându-se dacă şi numai dacă vectorii $|\varphi >$ şi $|\chi >$ sunt liniar-dependenţi.

În spaţiul unitar se poate introduce şi o **metrică**, definind **distanţa** dintre doi vectori $|\chi >$ şi $|\psi >$ prin:

$$d \equiv ||\chi - \psi|| = \sqrt{(|\chi > -|\psi >, |\chi > -|\psi >)} \tag{4.10}$$

deci **orice spaţiu unitar este şi un spaţiu metric**.

Spaţiul C^n (definit în paragraful anterior) devine un spaţiu unitar, numit **spaţiul euclidian n-dimensional**, prin introducerea produsului scalar:

$$(|x >, |y > \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k^* y_k \tag{4.11}$$

Un spaţiu important pentru mecanica cuantică este spaţiul euclidian format din totalitatea seturilor numărabile de o infinitate de numere complexe de forma:

$$|x >= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

pentru care :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \tag{4.13}$$

Suma a doi vectori şi produsul unui vector cu un număr complex se definesc la fel ca în spaţiul C^n, iar produsul scalar este definit prin:

$$(|x>, |y>) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* y_k \tag{4.14}$$

Vectorii $|e_1>$, $|e_2>, \dots\dots\dots$ care au numai unul din numerele din set egal cu 1 şi celelalte sunt egale cu zero, formează o bază a spaţiului.

De asemenea, un interes deosebit îl prezintă spaţiul liniar infinit-dimensional format din toate funcţiile complexe continue $f(x)$ definite pe axa reală, pentru care:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \tag{4.15}$$

În acest spaţiu, produsul scalar este definit prin:

$$(f, g) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx \tag{4.16}$$

În descrierea dată de Mecanica cuantică unei particule fără spin se foloseşte **spaţiul funcţiilor de undă**, un spaţiu unitar infinit-dimensional. Elementele sale sunt funcţii continue de trei variabile spaţiale şi una temporală $\psi(\vec{r}, t) \equiv \psi(x, y, z, t)$, funcţii diferenţiabile şi integrabile în modul pătrat:

$$\int\int\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV < \infty \tag{4.17}$$

iar produsul scalar a două funcţii este definit prin:

$$(\psi, \phi) \equiv \int\int\int \psi^* \phi dV \tag{4.18}$$

Un spaţiu unitar (euclidian) infinit-dimensional este, prin definiţie, un **spaţiu Hilbert** dacă el este şi un spaţiu **complet**, adică dacă orice şir Cauchy al său tinde către un element limită aparţinând spaţiului.

Spaţiul funcţiilor de undă, de interes pentru Mecanica cuantică, nu este un spaţiu complet, dar poate fi pus într-o legătură strânsă cu un spaţiu Hilbert (prin înlocuirea integralei Riemann cu integrala Lebesgue), astfel încât, în continuare vom utiliza denimirea de **spaţiul Hilbert al funcţiilor de undă**.

Într-un spaţiu Hilbert un sistem ortonormat de vectori este un **sistem complet de vectori** dacă singurul vector ortogonal pe toţi vectorii setului este vectorul nul. Un astfel de sistem ortonormat şi complet de vectori $|e_1>, |e_2>, |e_3>, ...|e_n>, ...$ (definiţi prin relaţia 4.1.6) este denumit şi **bază ortonormată a spaţiului Hilbert**. Dată fiind o bază ortonormată $\{|e_n>\}_{n=1}^{\infty}$, putem dezvolta orice vector al spaţiului Hilbert după vectorii bazei (vezi relaţia 4.1.2):

$$|\psi>= \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n> \tag{4.19}$$

unde coeficienţii c_n sunt definiţi prin produsul scalar:

$$c_n = (|e_n>, |\psi>) \tag{4.20}$$

Norma vectorului $|\psi>$ (4.1.7) se poate scrie atunci:

$$||\psi||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \tag{4.21}$$

4.1.3 Operatori liniari. Operaţii cu operatori liniari

Prin definiţie, un operator într-un spaţiu liniar pune în corespondenţă fiecărui vector al spaţiului un alt vector al acestuia; îl vom nota $\hat{A}$:

$$|\psi >= \hat{A}|\varphi > \quad \text{sau} \quad |\psi >= |\hat{A}\varphi > \tag{4.22}$$

Vom presupune în continuare că operatorii cu care lucrăm sunt definiţi în întreg spaţiul liniar.

Prin definiţie, un operator este **liniar** dacă:

$$\hat{A}(c_1|\varphi_1 > +c_2|\varphi_2 >) = c_1\hat{A}|\varphi_1 > +c_2\hat{A}|\varphi_2 > \tag{4.23}$$

pentru orice vectori $|\varphi_1 >$, şi $|\varphi_2 >$ şi orice numere complexe c_1 şi c_2. În Mecanica cuantică se întâlnesc şi probleme care cer utilizarea operatorilor **antiliniari**. Aceştia se definesc prin relaţia:

$$\hat{B}(c_1|\varphi_1 > +c_2|\varphi_2 >) = c_1^*\hat{B}|\varphi_1 > +c_2^*\hat{B}|\varphi_2 > \tag{4.24}$$

Orice operator liniar transformă vectorul nul $|0 >$ în el însuşi:

$$\hat{A}|0 >= |0 > \tag{4.25}$$

De asemenea, în fiecare spaţiu liniar sunt definiţi următorii operatori liniari particulari:

• **operatorul unitate** $\hat{I}$ cu acţiunea $\hat{I}|\varphi>=|\varphi>$, pentru orice vector $|\varphi>$

• **operatorul zero** $\hat{0}$ cu acţiunea $\hat{0}|\varphi>=|0>$, pentru orice vector $|\varphi>$

Cu operatorii liniari se pot efectua trei operaţii, al căror rezultat este tot un operator liniar, şi anume:

• **suma** a doi operaori $\hat{A}$ şi $\hat{B}$, notată $\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}$ şi definită prin modul de acţiune:

$$\hat{C}|\varphi>=\hat{A}|\varphi>+\hat{B}|\varphi> \tag{4.26}$$

• **înmulţirea unui operator cu un număr complex** λ, notată $\hat{C}=\lambda\hat{A}$ şi definită prin modul de acţiune:

$$\hat{C}=\lambda(\hat{A}|\varphi>) \tag{4.27}$$

• **înmulţirea a doi operatori** $\hat{A}$ şi $\hat{B}$, notată $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$ şi definită prin:

$$\hat{C}|\varphi>=\hat{A}(\hat{B}|\varphi>) \tag{4.28}$$

Ordinea factorilor într-un produs de operatori este importantă deoarece, în general, $\hat{A}\hat{B}\neq\hat{B}\hat{A}$. Se introduce operatorul **comutator** a doi operatori liniari:

$$\hat{C}\equiv\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\equiv[\hat{A},\hat{B}] \tag{4.29}$$

notat cu ajutorul unor paranteze drepte şi care joacă un rol important în Mecanica cuantică.

Dacă pentru un operator liniar $\hat{A}$ există un alt operator $\hat{B}$ cu proprietatea:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I} \tag{4.30}$$

atunci se spune că operatorul $\hat{A}$ este **nesingular**, iar operatorul $\hat{B}$ se numeşte **inversul** operatorului $\hat{A}$. Conform acestei relaţii de definiţie, inversul inversului unui operator este chiar operatorul însuşi:

$$(\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A} \tag{4.31}$$

Dacă operatorul $\hat{B}$ cerut de relaţia (4.1.30) nu există, se zice că operatorul $\hat{A}$ este **singular**. O caracteristică a unui operator singular este aceea că există unul sau mai mulţi vectori ai spaţiului, diferiţi de vectorul $|0>$, pe care acţiunea operatorului îi transformă în vectorul $|0>$:

$$\hat{A}|\varphi >= |0 >, \quad |\varphi >\neq |0 >\leftrightarrow \hat{A} \text{ operator singular} \tag{4.32}$$

Fie un operator liniar $\hat{A}$ ce acţionează într-un spaţiu unitar şi fie **produsul scalar** $(|\varphi >, \hat{A}|\psi >)$ care, în **notaţia Dirac** se scrie:

$$(|\varphi >, \hat{A}|\psi >) =< \varphi|\hat{A}|\psi >=< \varphi|(\hat{A}|\psi >) \tag{4.33}$$

unde vectorul "$< \varphi|$" se numeşte vector **"bra"**. Pe baza teoremei lui Riesz se poate scrie egalitatea:

$$(|\varphi >, \hat{A}|\psi >) = (|\chi >, |\psi >) \tag{4.34}$$

Se observă că prin această egalitate se stabileşte o corespondenţă între doi vectori ”ket” pe care o vom nota:

$$|\chi >= \hat{A}^{+}|\varphi > \tag{4.35}$$

unde operatorul $\hat{A}^{+}$ se numeşte **adjunctul** (conjugatul) operatorului $\hat{A}$. Operatorul adjunct $\hat{A}^{+}$ are următoarele proprietăţi:

- $(\hat{A}^{+})^{+} = \hat{A}$
- $(\hat{A} + \hat{B})^{+} = \hat{A}^{+} + \hat{B}^{+}$
- $\lambda\hat{A})^{+} = \lambda^{*}\hat{A}^{+}$
- $(AB)^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$

Operatorii care se bucură de proprietatea

$$\hat{A} = \hat{A}^{+} \tag{4.36}$$

se numesc **operatori autoadjuncţi** sau **hermitici**.

Fie doi vectori ”ket” fixaţi, $|u >$ şi $|v >$ într-un spaţiu Hilbert şi fie un operator liniar $\hat{A}$ definit prin modul de acţiune asupra unui ”ket” $|\varphi >$, prin intermediul vectorilor ”ket” fixaţi:

$$\hat{A}|\varphi >\equiv< v|\varphi > |u > \tag{4.37}$$

Se observă că acţiunea operatorului $\hat{A}$ dă un vector proporţional cu $|u >$, coeficientul de proporţionalitate fiind $< v|\varphi >$.

Vom considera în continuare acţiunea operatorului $\hat{A}$ asupra unui vector ”bra” $|\psi >$:

$$< \psi|\hat{A} =< \psi|u >< v| \tag{4.38}$$

adică, acţiunea operatorului $\hat{A}$ transformă vectorul "bra" $< \psi|$ într-un vector proproţional cu $< v|$, coeficientul de proporţionalitate fiind numărul $< \psi|u >$. Având în vedere această ultimă relaţie precum şi notaţia pentru produsul scalar (4.1.33), apare adecvată notarea operatorului $\hat{A}$ prin:

$$\hat{A} = |u >< v| \tag{4.39}$$

Se defineşte, în particular, operatorul:

$$\hat{P}_u =< u|u > \quad \text{cu} \quad < u|u >= 1 \tag{4.40}$$

şi se numeşte **proiectorul** pe subspaţiul unidimensional subântins de vectorul $|u >$ sau de vectorul $< u|$. Acest operator se bucură de proprietatea de **idempotenţă**, caracteristică oricărui operator de proiecţie:

$$\hat{P}_u^2 = \hat{P}_u \tag{4.41}$$

4.1.4 Operatori unitari

Prin definiţie un operator $\hat{U}$ este **unitar** dacă:

$$\hat{U}\hat{U}^+ = \hat{U}^+\hat{U} = \hat{I} \tag{4.42}$$

Conform definiţiei, operatorii unitari sunt operatori nesingulari (vezi paragraful precedent) iar inversul lor coincide cu adjunctul lor:

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^+ \tag{4.43}$$

Proprietatea fundamentală a operatorilor unitari este aceea de **conservare a produsului scalar**:

$$< \varphi_1|\varphi_2 >=< \hat{U}\varphi_1|U\varphi_2 > \tag{4.44}$$

De asemenea sunt adevărate următoarele proprietăţi:

• produsul dintre un număr complex λ şi un operator unitar este un operator unitar numai dacă $|\lambda| = 1$
• produsul a doi operatori unitari este întotdeauna un operator unitar

4.1.5 Problema cu valori proprii asociată unui operator hermitic

Fie un operator liniar $\hat{A}$, definit într-un spaţiu Hilbert. Prin definiţie, numărul a (în general complex) este **valoarea proprie** a operatorului $\hat{A}$ dacă există un vector al spaţiului Hilbert $|u> \neq |0>$ care satisface ecuaţia:

$$\hat{A}|u>= a|u>, \qquad |u>\in \text{spaţiului Hilbert} \tag{4.45}$$

Vectorul $|u>$ se numeşte **vector propriu** (sau caracteristic) al operatorului $\hat{A}$. În aplicaţiile concrete, pentru a defini mulţimea vectorilor proprii ai unui operator, ecuaţia (4.1.45) este suplimentată cu unele condiţii restrictive asupra vectorilor, numite **condiţii de regularitate** şi care sunt precizate pentru fiecare caz concret. Ecuaţia (4.1.45) defineşte orice vector propriu până la un factor multiplicativ arbitrar.

Mulţimea valorilor proprii este numită **spectrul valorilor proprii ale operatorului**. Dacă unei aceleiaşi valori proprii a îi corespund mai mulţi vectori proprii liniar-independenţi, valoarea proprie este **degenerată**, iar numărul vectorilor proprii liniar-independenţi reprezintă **ordinul degenerării** valorii proprii. Dacă unei valori proprii îi corespunde un singur vector propriu, atunci valoarea proprie este **nedegenerată**.

Mulţimea vectorilor proprii "ket" care satisface ecuaţia cu valori proprii (4.1.45) pentru o aceeaşi valoare proprie a formează un subspaţiu, numit **subspaţiul asociat valorii proprii** a a cărui dimensiune coincide cu ordinul degenerării valorii proprii a.

În Mecanica cuantică vom întâlni problema cu valori proprii numai pentru operatori hermitici ($\hat{A} = \hat{A}^{+}$). În acest caz, ecuaţia (4.1.45) are următoarele două proprietăţi importante:

• valorile proprii ale operatorilor hermitici sunt numere reale şi sunt date de relaţia:

$$a = \frac{< u|A|u >}{< u|u >} \tag{4.46}$$

• vectorii proprii corespunzători la valori proprii diferite sunt ortogonali

Dacă spectrul valorilor proprii ale operatorului $\hat{A}$ constă din valori proprii pentru care există vecinăţi în care nu se găsesc alte valori proprii, atunci spectrul valorilor proprii ale operatorului $\hat{A}$ este un **spectru discret**. Spectrul valorilor proprii ale operatorului $\hat{A}$ ce satisface ecuaţia cu valori proprii (4.1.45) poate fi şi un **spectru mixt**, adică un spectru format din porţiuni de spectru discret şi din porţiuni de **spectru continuu** (porţiuni pentru care în vecinătatea oricât de mică a unei valori proprii se găsesc întotdeauna o infinitate de alte valori proprii).

Admitem fără demonstraţie, următoarele rezultate extrem de importante pentru Mecanica cuantică, referitoare la problema cu valori proprii în sens generalizat, pentru un operator hermitic:

• valorile proprii sunt reale şi formează în general un spectru mixt
• vectorii proprii corespunzători la valori proprii din porţiunea discretă au norma finită şi deci aparţin spaţiului Hilbert
• vectorii proprii corespunzători la valori proprii din porţiunea continuă a spectrului nu au norma finită, deci nu aparţin spaţiului Hilbert

În conformitate cu cele trei afirmaţii anterioare vom adopta următoarele notaţii pentru valorile proprii:

• a_n, $n = 1, 2, ...$ în spectrul discret
• $a(\alpha)$ $(\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2)$ în spectrul continuu

Vectorii proprii se caracterizează de obicei prin mai mulţi indici, pentru că valorile proprii sunt degenerate. Vom nota prin $|nr>$ sau cu $|u_{nr}>$, $r = 1, 2, ...g_n$, vectorii proprii corespunzători valorii proprii a_n, degenerată de ordin g_n. Cel de-al doilea indice r apare ori de câte ori valoarea proprie este degenerată. Vom nota cu $|\alpha s>$ $(s = 1, 2, ...)$ vectorii proprii corespunzători valorii proprii $a(\alpha)$. Indicele s este folosit pentru a descrie degenerarea care în spectrul continuu este în general de ordin infinit.

Deşi vectorii proprii ai spectrului continuu nu pot fi normaţi, ei pot satisface o condiţie e ortonormare în sens generalizat. Admitem următoarele proprietăţi de ortonormare ale vectorilor proprii ai unui operator hermitic:

• în spectrul discret

$$< nr|n'r' >= \delta_{nn'}\delta_{rr'} \tag{4.47}$$

ceea ce înseamnă că, pe de-o parte vectorii proprii corespunzători la valori proprii diferite sunt ortogonali şi că vectorii proprii au norma finită (care poate fi făcută 1), iar pe de altă parte vectorii proprii corespunzători la aceeaşi valoare proprie pot fi întotdeauna aleşi ortogonali între ei
• orice vector propriu corespunzător unei valori proprii din spectrul discret este ortogonal pe un vector propriu corespunzător unei valori proprii din spectrul continuu:

$$< nr|\alpha s >= 0 \tag{4.48}$$

• în spectrul continuu, prin alegerea convenabilă a unui factor multiplicativ în expresia fiecărui vector propriu, se poate asigura valabilitatea relaţiei:

$$< \alpha s|\alpha' s' >= \delta_{ss'}\delta(\alpha - \alpha') \tag{4.49}$$

unde $\delta(\alpha - \alpha')$ este funcţia lui Dirac (vezi Anexa 2). Proprietatea (4.1.49) se numeşte proprietatea de **ortonormare în scara parametrului** s, în sens generalizat.

4.1.6 Observabile

Vom considera în continuare operatorii hermitici care admit un sistem complet de vectori proprii. Aceşti operatori vor fi denumiţi şi **observabile**.

Observaţie: mărimile care pot fi măsurate pentru o particulă cuantică (sau sistem cuantic) sunt denumite **mărimi fizice** sau **mărimi observabile** (impulsul, poziţia, momentul cinetic, energia, momentul magnetic...). Ele sunt de obicei mărimi cu care

operăm şi clasic şi pe care le măsurăm folosind aparate macroscopice, deci le determinăm în urma interacţiei dintre un sistem cuantic şi un sistem care ascultă de legile clasice. **Starea** unui sistem cuantic se manifestă în **rezulutatele** pe care le obţinem la măsurarea observabilelor sale.
Răspunsul obţinut la măsurarea unei observabile nu este univoc determinat de condiţiile de experienţă - sistemul cuantic ascultă de legi statistice. **Statisticele observabilelor** unui sistem cuantic sunt singurele proprietăţi ale sale pe care le putem determina experimental. **Deci, starea unui sistem cuantic se identifică cu totalitatea statisticilor observabilelor sistemului.**

Coincidenţa denumirilor pentru mărimile fizice şi pentru operatorii hermitici amintiţi mai sus, nu este întâmplătoare (vezi principiul II al Mecanicii cuantice).

Faptul că un operator hermitic $\hat{A}$ admite un sistem complet de vectori proprii permite dezvoltarea oricărui vector $|\psi>$ al spaţiului Hilbert în forma generalizată (spectrul mixt):

$$|\psi>=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{g_n} c_{nr}|n,r> + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sum_{s=1}^{\infty} c_{\alpha s}|\alpha,s> d\alpha \qquad (4.50)$$

unde coeficienţii dezvoltării sunt daţi de relaţiile:

$$c_{nr} =< nr|\psi> \qquad c_{\alpha s} =< \alpha s|\psi> \qquad (4.51)$$

după cum rezultă din proprietăţile de ortonormare. Dacă vom înlocui relaţia (4.1.51) în relaţia (4.1.50) vom ajunge la o relaţie importantă:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{g_n} |nr>< nr| + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sum_{s=1}^{\infty} |\alpha s>< \alpha s| = \hat{I} \qquad (4.52)$$

ceea ce exprimă **relaţia de completitudine** a sistemului de vectori proprii ai operatorului $\hat{A}$. Pătratul normei vectorului $|\psi>$ este dat de relaţia Bessel:

$$< \psi|\psi >= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{g_n} |c_{nr}|^2 + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{\alpha s}|^2 d\alpha \tag{4.53}$$

Fie două observabile $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ şi fie $\hat{C}$ comutatorul acestora definit conform relaţiei (4.1.29). Dacă $\hat{C} = 0$, atunci observabilele se numesc **compatibile**, iar dacă $\hat{C} \neq 0$ observabilele se numesc **incompatibile**. Pentru aplicaţiile Mecanicii cuantice este deosebit de importantă următoare teoremă: **condiţia necesară şi suficientă ca două observabile $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ să comute este ca ele să admită un sistem complet comun de vectori proprii**.

Conform acestei teoreme, în cazul particular în care o valoare proprie a operatorului $\hat{A}$ este nedegenerată

$$\hat{A}|a >= a|a >, \tag{4.54}$$

vectorul propriu unic care-i corespunde trebuie să fie vector propriu şi pentru operatorul $\hat{B}$. Intr-adevăr, dacă aplicăm operatorul $\hat{B}$ ecuaţiei precedente, vom obţine, pe baza comutării:

$$\hat{B}(\hat{A}|a >) = \hat{A}(\hat{B}|a >) = a\hat{B}|a > \tag{4.55}$$

deci, pentru că a este valoare proprie nedegenerată, rezultă:

$$\hat{B}|a >= \lambda|a > \tag{4.56}$$

Dacă valorile proprii a şi b sunt degenerate, vectorii proprii ai celor doi operatori nu sunt univoc determinaţi şi deci nici sistemul

complet de vectori din teoremă nu este univoc determinat. Considerând însă mai multe observabile compatibile două câte două $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$,..., se poate ajunge în situaţia în care vectorii proprii comuni să fie univoc determinaţi (până la factori multiplicativi).

Prin definiţie, observabilele $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, ... formează un **sistem complet de observabile** dacă:

• oricare doi dintre operatori comută (observabile compatibile)
• la oricare combinaţie de valori proprii fixate a, b, c, ... ale operatorilor corespunde un vector propriu comun unic $|abc>$.

4.1.7 Reprezentarea matricială a vectorilor şi operatorilor

Fie un spaţiu unitar şi fie

$$|e_1>, |e_2>, |e_3>, ...|e_n>, ... \tag{4.57}$$

un sistem complet ortonormat de vectori din acest spaţiu. Pentru simplificare vom considera că mulţimea de vectori (4.1.57) este numărabilă, iar condiţia de ortonormare se va scrie:

$$< e_i|e_k >= \delta_{ik} \tag{4.58}$$

Relaţiile pe care le vom stabili se pot generaliza uşor la cazul în care mulţimea (4.1.57) nu este numărabilă. Completitudinea sistemului (4.1.57) se manifestă prin relaţia (4.1.52) aplicată în acest caz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e_n >< e_n| = \hat{I} \tag{4.59}$$

Orice vector al spaţiului unitar poate fi descompus, după vectorii bazei, în forma:

$$|\psi >= \sum_{n=1}^{\infty} c_n|e_n > \qquad c_n =< e_n|\psi > \tag{4.60}$$

Cunoaşterea vectorului $|\psi >$ este echivalentă cu cunoaşterea tuturor numerelor c_n:

$$|\psi > \leftrightarrow \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{4.61}$$

Se spune că numerele c_n caracterizează **vectorul** $|\psi >$ **în reprezentarea sistemului complet de vectori** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Numerele c_n se plasează într-o coloană care are forma, în cazul infinit-dimensional:

$$|\psi >= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

Relaţia (4.1.62) scrisă cu ajutorul vectorului "bra" $< \psi|$ este:

$$< \psi| = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* < e_n| \tag{4.63}$$

deci, vectorul $< \psi|$ este caracterizat în reprezentarea $\{|e_n >\}_{n=1}^{\infty}$ prin coeficienţii c_n^*, care pot fi convenabil plasaţi într-o matrice-linie (infinită în general):

$$< \psi| = (c_1^* \;\; c_2^* \;\; c_3^* ......) \tag{4.64}$$

Produsul scalar a doi vectori $|\psi>$ şi $|\varphi>$

$$|\psi>=\sum_{n=1}^{\infty} c_n|e_n> \qquad |\varphi>=\sum_{n=1}^{\infty} d_n|e_n> \tag{4.65}$$

are expresia cunoscută:

$$<\psi|\varphi>=(c_1^* \;\; c_2^* \;\; ......)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

Fie un operator liniar oarecare $\hat{A}$. Acţiunea sa asupra oricărui vector este determinată de acţiunea asupra vectorilor unui sistem complet de vectori. Dacă vom considera acest sistem ca fiind sistemul ortonormat (4.1.52), atunci acţiunea operatorului $\hat{A}$ este:

$$\hat{A}|e_n>=\sum_k A_{kn}|e_k> \tag{4.67}$$

unde numerele A_{kn} se numesc **elementele de matrice ale operatorului** $\hat{A}$ în reprezentarea sistemului complet de vectori $\{|e_k>\}_{k=1}^{\infty}$. Din ultima relaţie, dacă se ţine cont de condiţia de ortonormare (4.1.58), rezultă:

$$A_{kn}=<e_k|\hat{A}|e_n> \tag{4.68}$$

Totalitatea numerelor A_{kn} se plasează într-o matrice pătratică cu o infinitate de linii şi coloane:

$$\hat{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ..... \\ A_{21} & A_{22} & ..... \\ \vdots & & \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

Sunt valabile următoarele **proprietăţi**:

• relaţiilor algebrice dintre vectori ("ket" sau "bra") le corespund aceleaşi relaţii între matricile asociate

• orice ecuaţie vectorială

$$|\varphi >= \hat{A}|\psi > \tag{4.70}$$

cu

$$|\psi >= \sum_n c_n|e_n > \qquad |\varphi >= \sum_k d_k|e_k >$$

este echivalentă cu ecuaţia matricială:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ..... \\ A_{21} & A_{22} & ..... \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

adică cu egalităţile:

$$d_k = \sum_n A_{kn}c_n \tag{4.72}$$

• relaţiilor algebrice între operatori:

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \quad \hat{C} = a\hat{A} \quad \hat{C} = \hat{A}\hat{B} \tag{4.73}$$

le corespund respectiv ecuaţiile matriciale:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= A_{ij} + B_{ij} \\ C_{ij} &= aA_{ij} \\ C_{ij} &= \sum_k A_{ik}B_{kj} \end{aligned} \tag{4.74}$$

• matricea asociată operatorului unitate $\hat{I}$ este matricea unitate (elementele de pe diagonală sunt egale cu 1 iar celelalte sunt zero):

$$I_{jk} =< e_j|\hat{I}|e_k >=< e_j|e_k >= \delta_{jk} \tag{4.75}$$

• unui operator hermitic îi corespunde o matrice hermitică (adică o matrice care coincide cu complex-conjugata transpusei ei):

$$A_{mn} =< e_m|\hat{A}|e_n >=< e_n|\hat{A}^+|e_m >^* =< e_n|\hat{A}|e_m >^* = A^*_{nm} \tag{4.76}$$

• unui operator unitar $\hat{U}$ îi corespunde o matrice unitară:

$$\hat{U}\hat{U}^+ = \hat{U}^+\hat{U} = \hat{I} \rightarrow \sum_n U_{kn}U^*_{mn} = \delta_{km}; \quad \sum_n U^*_{nk}U_{nm} = \delta_{km} \tag{4.77}$$

În cazul finit-dimensional putem calcula întotdeauna determinantul unei matrici. Dacă el este diferit de zero atunci matricea este nesingulară. Pentru matricile unitare (4.1.77) rezultă:

$$|det\ U| = 1 \tag{4.78}$$

De obicei, ca vectori ai sistemului ortonormat complet (4.1.57) se iau vectorii proprii au unui operator hermitic $\hat{A}$:

$$|e_k >= |u_k > \qquad \hat{A}|u_k >= a_k|u_k > \tag{4.79}$$

Matricea asociată oricărui operator în reprezentarea vectorilor săi proprii este diagonală deoarece:

$$A_{mn} =< u_m|\hat{a}|u_n >= a_n < u_m|u_n >= a_n\delta_{mn} \tag{4.80}$$

iar pe diagonala ei figurează chiar valorile proprii ale operatorului.

4.2 Principiile mecanicii cuantice

Legile generale ale comportării sistemelor atomice sunt descrise în forma unor **principii** (postulate) ale Mecanicii cuantice. Exprimarea legilor Mecanicii cuantice nu se poate face fără folosirea unui limbaj matematic abstract. În cadrul principiilor sunt prezentate atât **formalismul de lucru** cât şi **interpretarea formalismului**, adică modul în care din mărimile cu care operează teoria se extrag rezultate cu semnificaţie fizică.

4.2.1 Principiul I (principiul stărilor)

Enunţ: starea oricărui sistem fizic la un moment dat este descrisă de unul sau mai mulţi vectori normaţi dintr-un spaţiu Hilbert

$$|\psi_1>, |\psi_2>, ...|\psi_K> \qquad <\psi_k|\psi_k>= 1 \qquad k = \overline{1, K} \tag{4.81}$$

împreună cu ponderile asociate p_1, p_2, $....p_K$, numere pozitive şi subunitare $(0 \leq p_k \leq 1)$ pentru care

$$\sum_{k=1}^{K} p_k = 1 \tag{4.82}$$

Observaţii

• Vectorii care descriu starea sistemului fizic se numesc **vectori de stare**, iar spaţiul Hilbert căruia îi aparţin se numeşte **spaţiul stărilor**.

• Vectorii de stare constituie generalizarea funcţiilor de undă $\psi(\vec{r}, t)$ întâlnite în paragraful (4.1.2), folosite pentru descrierea comportării cuantice a unei particule fără spin. Funcţia de undă

este interpretată ca o amplitudine de probabilitate de localizare a particulei. Ea este continuă şi integrabilă în modul pătrat, iar pătratul amplitudinii reprezintă densitatea de probabilitate de localizare. Condiţia de normare pentru funcţia de undă se scrie explicit:

$$\int_{\infty} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \tag{4.83}$$

şi ne arată că, probabilitatea pentru a găsi particula în spaţiu la momentul t este egală cu 1, adică reprezintă certitudinea. Produsul scalar a două funcţii de undă este definit prin:

$$< \psi|\varphi > \equiv \int_{\infty} \psi^*(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\vec{r} \tag{4.84}$$

Spaţiul stărilor se schimbă odată cu sistemul fizic studiat. Pentru un sistem de N particule fără spin, dacă vom nota cu $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N$ vectorii lor de poziţie faţă de un sistem fix de axe, atunci vectorii de stare sunt funcţii continue de aceste coordonate şi de timp

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N; t) \tag{4.85}$$

normabile, pentru care condiţia generală (4.2.81) se scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ...... \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2...\vec{r}_N; t)|^2 dV_1 dV_2....dV_N = 1 \tag{4.86}$$

• Vectorii de stare pentru un sistem de una sau mai multe particule pot fi aleşi nu numai în funcţie de coordonatele de poziţie. Orice particularizare a vectorilor de stare înseamnă alegerea unei baze în spaţiul stărilor, ceea ce oglindeşte anumite ipoteze asupra sistemului studiat, bazate în ultimă instanţă pe cunoaşterea sa

experimentală.

• Principiul I nu formulează restricţii asupra vectorilor de stare, deci, orice vector al spaţiului stărilor ar putea figura printre vectorii de stare; în particular, dacă $|\varphi_1>$ şi $|\varphi_2>$ sunt vectori de stare, atunci şi vectorul

$$|\psi>= c_1|\varphi_1> +c_2|\varphi_2> \tag{4.87}$$

(c_1, c_2 numere complexe) este un vector de stare. Astfel, principiul I implică valabilitatea în Mecanica cuantică a **principiului de suprapunere a stărilor**, proprietate cerută de analiza experienţelor de difracţie.

Rostul vectorilor de stare este să descrie proprietăţile stării sistemului, adică să descrie statistica oricărei observabile a sistemului. Experinenţa conduce la concluzia că există două situaţii distincte:
- cazul stărilor pure, caz în care proprietăţile sistemului rezultă dintr-un singur vector de stare a cărui pondere este egală cu 1
- cazul stărilor mixte, caz în care sunt necesari mai mulţi vectori de stare împreună cu ponderile lor, pentru descrierea stării (cel mai frecvent întâlnit în practică).

4.2.2 Principiul II

Enunţ:

a. Oricărei mărimi observabile A a unui sistem fizic îi corespunde un operator hermitic $\hat{A}$ ce acţionează în spaţiul stărilor asociat sistemului fizic, operator care admite un sistem complet de vectori proprii.
b. Valorile proprii ale operatorului asociat unei observabile reprezintă singurele valori pe care le poate lua observabila respectivă

în condiţiile experimentale create de măsurarea ei.
c. Operatorii $\hat{Q}_k$ şi $\hat{P}_k$, corespunzători coordonatelor carteziene de poziţie q_k şi respectiv impulsurilor conjugate p_k pentru un sistem de particule, se construiesc în aşa fel încât să fie respectate relaţiile operatoriale:

$$[\hat{Q}_j, \hat{Q}_k] = \hat{0} \quad [\hat{P}_j, \hat{P}_k] = \hat{0} \quad [\hat{P}_j, \hat{Q}_k] = -i\hbar\delta_{jk}\hat{I} \qquad (4.88)$$

d. Pentru observabilele (energie, moment cinetic orbital) care în cazul clasic sunt funcţii de variabilele dinamice, operatorul corespunzător în Mecanica cuantică se obţine înlocuind, în expresia clasică a observabilelor, variabilele canonice prin operatorii ataşaţi lor. În cazul în care observabilele nu sunt funcţii de variabilele dinamice, se va recurge la alte consideraţii pentru a stabili expresia operatorului asociat.

Observaţii

• Conform afirmaţiei **b**, valorile proprii ale operatorului asociat unei observabile au o semnificaţie fizică directă. Valorile proprii ale unui operator se obţin din rezolvarea ecuaţiei cu valori proprii (4.1.45) pentru care sa caută soluţii ce satisfac condiţiile de regularitate specifice. Interpretarea dată valorilor proprii este sprijinită de faptul că spectrul de valori proprii al unui operator hermitic este format din numere reale.

De asemenea, prin afirmaţia **b** se explică cuantificarea unor mărimi fizice (cele pentru care spectrul se valori proprii al operatorului asociat este discret) şi necuantificarea altora (spectrul continuu de valori proprii).

În legătură cu valorile pe care le poate lua o observabilă, este posi-

bilă o comparaţie directă între teorie şi experienţă, din care să rezulte corectitudinea operatorului asociat unei observabile concrete precum şi însăşi corectitudinea formalismului în care mărimile observabile sunt reprezentate prin operatori hermitici.

Referitor la ecuaţia cu valori proprii (4.1.45), se observă că operatorul $\hat{A}$ şi valoarea proprie a au aceeaşi dimensiune, ceea ce înseamnă, conform principiului II, că operatorul asociat are dimensiunea mărimii fizice pe care o reprezintă.

• Referitor la afirmaţia **c**, se poate sublinia că, între Mecacnica cuantică şi cea clasică există o legătură puternică ce se reflectă în structura formală a Mecanicii cuantice. Dirac a emis ipoteza că în Mecanica cuantică trebuie să existe o operaţie care să implice operatorii asociaţi a două observabile, al cărei corespondent în Mecanica clasică să fie operaţia de construire a parantezei Poisson pentru mărimile fizice clasice respective.
Paranteza Poisson a două mărimi observabile ce depind de variabilele canonice p şi q are expresia dată de relaţia (3.3.32) (din capitolul anterior) şi se bucură de proprietăţile deja amintite de liniaritate în factori, antisimetrie, identitatea lui Jacobi. In particular, parantezele Poisson pentru variabilele canonice p şi q au expresiile date de:

$$\{q_j, q_k\} = 0 \qquad \{p_j, p_k\} = 0 \qquad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk} \tag{4.89}$$

Proprietăţile parantezelor Poisson caracterizează şi operaţia de formare a comutatorului a doi operatori liniari, definită prin relaţia (4.1.29):

$$[\hat{B}, \hat{A}] = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\hat{A}, \hat{B}] \quad \text{antisimetrie} \tag{4.90}$$

$$[\alpha_1\hat{A}_1 + \alpha_2\hat{A}_2, \hat{B}] = \alpha_1[\hat{A}_1, \hat{B}] + \alpha_2[\hat{A}_2, \hat{B}] \quad \text{liniaritate} \tag{4.91}$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \tag{4.92}$$

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{C}] + [[\hat{B}, \hat{C}], \hat{A}] + [[\hat{C}, \hat{A}], \hat{B}] = 0 \quad \text{identitatea Jacobi} \tag{4.93}$$

Similitudinea proprietăţilor parantezei Poisson a două observabile şi ale comutatorului operatorilor asociaţi face plauzibilă punerea în corespondenţă a acestor mărimi. Există însă o deosebire de care va trebui să ţinem seama: în timp ce paranteza Poisson a două funcţii reale este tot o funcţie reală, comutatorul a doi operatori hermitici nu este un operator hermitic, ci unul antihermitic:

$$[\hat{A}, \hat{B}]^+ = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{B}^+ = -[\hat{A}, \hat{B}] \tag{4.94}$$

Se observă că, dacă se înmulţeşte comutatorul cu numărul imaginar $i = \sqrt{-1}$, se obţine un operator hermitic. Deci, nu este nefiresc să se stabilească o corespondenţă între paranteza Poisson $\{A, B\}$ şi comutatorul $i[\hat{A}, \hat{B}]$. Trebuie doar să intervină un factor de proporţionalitate care să asigure aceleaşi dimensiuni cantităţilor puse în corespondenţă. Acest factor pentru comutatorul operatorilor este chiar constanta Planck redusă $\hbar$.
În particular, pentru $A = q_j$ şi $B = q_k$, rezultă corespondenţa:

$$\{q_j, q_k\} \leftrightarrow \frac{i}{\hbar}[\hat{Q}_j, \hat{Q}_k] \tag{4.95}$$

Analog, pentru $A = p_j$ şi $B = p_k$, obţinem condiţia:

$$[\hat{P}_j, \hat{P}_k] = 0 \tag{4.96}$$

Pentru $A = p_j$ şi $B = q_k$, deoarece $\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}$ corespondenţa:

$$\{p_j, q_k\} \leftrightarrow \frac{i}{\hbar}[\hat{P}_j, \hat{Q}_k] \tag{4.97}$$

conduce la realaţia:

$$[\hat{P}_j, \hat{Q}_k] = \frac{\hbar}{i}\delta_{jk}\hat{I} \tag{4.98}$$

• Procedeul indicat de principiul II (afirmaţia **d**) de înlocuire a variabilelor canonice prin operatorii asociaţi lor în expresia clasică a unei mărimi fizice, permite construirea operatorilor asociaţi oricărei observabile cu corespondent clasic.

4.2.3 Principiul III (principiul interpretării statistice)

A. Cazul pur

Enunţ: la o măsurare a unei observabile A, efectuată la momentul t, în starea pură descrisă de vectorul de stare $|\psi>$, probabilitatea ca rezultatul să fie o valoare proprie a_n din spectrul discret al operatorului asociat observabilei este:

$$p(a_n) = \sum_{r=1}^{g_n} |c_{nr}|^2 = \sum_{r=1}^{g_n} |<nr|\psi>|^2 \tag{4.99}$$

iar probabilitatea de a găsi un rezultat cuprins în intervalul $(a, a+da)$ din spectrul continuu este:

$$dp = (\sum_s |c_{\alpha s}|^2)d\alpha = \sum_s |<\alpha s|\psi>|^2 d\alpha \tag{4.100}$$

• **Observaţii şi consecinţe**

• În enunţul principiului III al Mecanicii cuantice s-au respectat notaţiile din paragraful 4.1.5 referitoare la vectorii proprii pentru spectrul discret şi respectiv continuu pentru cazul general în care valorile proprii sunt degenerate.
• Principiul III exprimă în mod explicit previziunile statistice ale Mecanicii cuantice, previziuni ce rezultă din vectorul de stare. În afară de vectorul de stare trebuie cunoscuţi operatorul $\hat{A}$ asociat observabilei pe care o studiem, valorile şi vectorii proprii ai acestuia.
• Statisticile observabilelor depind de timp, pentru că şi vectorul de stare, deci coeficienţii c_{nr} şi $c_{\alpha s}$, daţi de relaţia (4.1.51) depind de timp.
Condiţia de normare a vectorului de stare descompus după sistemul complet de vectori proprii ai operatorului $\hat{A}$ asociat observabilei A:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{g_n}|c_{nr}|^2+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sum_{s=1}^{\infty}|c_{\alpha s}|^2 d\alpha=1 \tag{4.101}$$

se transcrie, pe baza principiului III, sub forma:

$$\sum_n p(a_n)+\int dp=1 \tag{4.102}$$

Astfel, se asigură condiţia de normare a probabilităţilor, venind în sprijinul interpretării formulate de principiul III.

• **Valoarea medie a unei observabile**

Deoarece principiile I şi II ne arată ce rezultate se pot obţine la măsurarea unei observabile şi cu ce probabilităţi, ele permit calcularea **mediei statistice** a observabilelor în fiecare stare a sistemului fizic. Conform definiţiei mediei statistice pentru o variabilă aleatoare x, din teoria probabilităţilor

$$\bar{x} \equiv < x > \equiv \sum_n x_n p_n \tag{4.103}$$

şi ţinând seama de interpretarea statistică a rezultatelor în Mecanica cuantică, avem:

$$\bar{A} = \sum_n a_n p(a_n) + \int a\, dp(a) = \sum_n \sum_{r=1}^{g_n} a_n |c_{nr}|^2 + \int \sum_s a |c_{\alpha s}|^2 d\alpha \tag{4.104}$$

Folosind expresiile (4.1.51) pentru coeficienţii c_{nr} şi $c_{\alpha s}$ obţinem:

$$\bar{A} = \sum_n \sum_{r=1}^{g_n} a_n c_{nr} < \psi|\hat{A}|nr > + \int \sum_s a c_{\alpha s} < \psi|\hat{A}|\alpha s > d\alpha \tag{4.105}$$

Deoarece vectorii $|nr>$ şi $\alpha s>$ sunt vectori proprii ai operatorului $\hat{A}$, putem exprima valoarea medie a unei observabile prin relaţia:

$$\bar{A} = \sum_n \sum_{r=1}^{g_n} c_{nr} < \psi|\hat{A}|nr > + \int \sum_s c_{\alpha s} < \psi|\hat{A}|\alpha s > d\alpha \tag{4.106}$$

Dacă vom ţine cont de liniaritatea produsului scalar în al doilea factor, precum şi de liniaritatea operatorului $\hat{A}$, expresia precedentă se poate scrie sub o formă foarte simplă:

$$\bar{A} = < \psi|\hat{A}|\psi > \tag{4.107}$$

Formula (4.2.107) ne arată că, dacă ţinem cont de hermiticitatea operatorului $\hat{A}$, $\bar{A}$ este un număr real, în acord cu interpretarea mărimii fizice A.

B. Cazul mixt

Dacă sistemul fizic se află într-o stare mixtă, atunci, pentru descrierea proprietăţilor sale, adică a statisticilor observabilelor sale, nu este suficient un singur vector de stare. Statisticile observabilelor, în acest caz nu pot fi descifrate decât ca o suprapunere a unor statistici care fiecare în parte rezultă dintr-un vector de stare şi intervin cu anumite ponderi.

Enunţ: la măsurarea observabilei A, efectuată la momentul t, în starea descrisă de vectorii de stare $|\psi_1 >, |\psi_2 >, ...|\psi_K >$ şi ponderile $p_1, p_2, ...p_K$, probabilitatea ca rezultatul să fie o valoare proprie a_m din spectrul discret este dată de:

$$p(a_m) = \sum_{k=1}^{K} p_k \sum_{r=1}^{g_m} | < mr|\psi_k > |^2 \tag{4.108}$$

iar probabilitatea de a găsi un rezultat în intervalul $(a,\ a + da)$ din spectrul continuu este:

$$dp = \sum_{k=1}^{K} p_k (\sum_{s} | < \alpha s|\psi_k > |^2) d\alpha \tag{4.109}$$

Observaţii şi consecinţe

• Afirmaţiile principiului III referitoare la cazul mixt constituie o generalizare a cazului pur: probabilităţile pentru diferitele rezultate posibile se obţin prin însumarea (cu ponderi) a probabilităţilor din cazul unor stări pure fictive, care ar fi descrise de câte unul din cei K vectori de stare.
• Valoarea medie a unei observabile într-o stare mixtă va fi, ţinând cont de Principiul III:

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^{K} p_k < \psi_k|\hat{A}|\psi_k > \tag{4.110}$$

Deci, media unei observabile într-o stare mixtă este o medie ponderată a valorilor medii în stări pure descrise de fiecare din vectorii de stare.
• În cazul mixt, condiţia (4.2.102) de normare a probabilităţilor este asigurată de completitudinea sistemului de vectori proprii ai operatorului $\hat{A}$, de normarea vectorilor de stare (4.2.81) şi de proprietatea (4.2.82) a ponderilor.
• Pentru ca la un moment dat să avem certitudinea rezultatului obţinut la măsurarea unei observabile A, este necesar şi suficient ca toţi vectorii de stare să fie vectori proprii ai operatorului $\hat{A}$ ataşat observabilei, pentru aceeaşi valoare proprie din spectrul discret.

4.2.4 Principiul IV (principiul evoluţiei temporale)

Afirmaţiile conţinute în principiile anterioare s-au referit la starea sistemului la un moment dat, dar, proprietăţile sistemelor sunt dependente de timp (statisticile observabilelor se modifică în timp).

Enunţ: pentru orice sistem cuantic există un operator hermitic $\hat{H}$, numit **operatorul hamiltonian**, astfel încât vectorii de stare care descriu starea sistemului satisfac ecuaţia diferenţială de ordin întâi în raport cu timpul:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_k>=\hat{H}|\psi_k> \qquad k=\overline{1,K} \tag{4.111}$$

Ponderile asociate nu depind de timp.
Ori de câte ori este posibil, operatorul hamiltonian este construit pornind de la funcţia lui Hamilton corespunzătoare sistemului în cazul clasic.
Dacă sistemul evoluează în condiţii externe independente de timp, caz în care are sens observabila energiei, atunci operatorul hamiltonian coincide cu operatorul energiei.

Observaţii şi consecinţe

• Ecuaţia (4.2.111) se numeşte **ecuaţia Schrödinger generalizată** sau **ecuaţia Schrödinger dependentă de timp (sau temporală)**.
• Ecuaţia Schrödinger temporală este liniară şi omogenă. Aceasta asigură efectiv valabilitatea principiului de suprapunere a stărilor, posibilitate deschisă de principiul I.
• Ecuaţia Schrödinger generalizată este de ordinul întâi în raport cu timpul. De aici rezultă că, vectorul de stare la momentul iniţial determină univoc vectorul de stare la un moment ulterior. Şi în cazul cuantic, la fel ca şi în cel clasic, starea la un moment dat determină starea la un moment de timp ulterior. Observăm că şi din punct de vedere al evoluţiei temporale starea se identifică cu vectorii de undă şi ponderile asociate.
• Produsul scalar a două soluţii ale ecuaţiei Schrödinger generalizate este constant în timp. Dacă $|\psi_1>$ şi $|\psi_2>$ sunt doi vectori

de stare (deci satisfac ecuaţia Schrödinger temporală) atunci

$$< \psi_1|\psi_2 >_t = < \psi_1|\psi_2 >_{t_o} \tag{4.112}$$

În particular, dacă $|\psi_1 >= |\psi_2 >$ atunci **norma vectorului de stare se conservă în timp**. Dacă normăm vectorii de stare la un moment iniţial ($< \psi|\psi >_{t_o} = 1$), atunci ei vor fi normaţi la orice moment de timp ulterior ($< \psi|\psi >_t = 1$).

• În situaţiile care au analog clasic, legea de evoluţie se dovedeşte înrudită cu ecuaţia Hamilton-Jacobi din Mecanica clasică.

Să considerăm ca exemplu o particulă fără spin, de masă m, aflată într-un câmp de forţă care derivă din potenţialul $V(\vec{r}, t)$ ($\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}, t)$). Vom presupune că forţa depinde explicit de timp, deci nu suntem în cazul conservativ. În aceste condiţii, în cazul clasic, funcţia:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \tag{4.113}$$

joacă rol de hamiltoniană. Ecuaţiile de mişcare, conform formalismului Hamilton vor fi:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \vec{p} = m\vec{v} \tag{4.114}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \vec{q} = \vec{r} \tag{4.115}$$

În cazul cuantic, se admite că operatorul hamiltonian corespunzăsituaţiei descrise este:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(\vec{r}, t) \tag{4.116}$$

adică este operatorul obţinut din hamiltoniana clasică prin substitu
titu

c tiile obişnuite $\vec{p} \rightarrow \hat{P}$ şi $\vec{r} \rightarrow \hat{r}$. Atunci, conform principiului IV, funcţia de undă $\psi(\vec{r}, t)$, care descrie o stare pură a particulei, satisface ecuaţia :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi + V\psi \tag{4.117}$$

adică tocmai ecuaţia Schrödinger temporală, în forma ei iniţială.

• Variaţia în timp a valorii medii a unei observabile

Valoarea medie a unei observabile A, dată în cazul unei stări pure de relaţia (4.2.107) are în general o dependenţă de timp. Derivata madiei în raport cu timpul are o expresie simplă:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} =< \dot{\psi}|\hat{A}|\psi > + < \psi|\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}|\psi > + < \psi|\hat{A}|\dot{\psi} > \tag{4.118}$$

Vom înlocui în această ultimă relaţie derivatele funcţiei de undă, folosind legea de evoluţie (4.2.111):

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} < \psi|\hat{H}\hat{A}|\psi > + < \psi|\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}|\psi > + \frac{1}{i\hbar} < \psi|\hat{A}\hat{H}|\psi >$$
$$=< \psi|\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}|\psi > + \frac{1}{i\hbar} < \psi|\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}|\psi> \tag{4.119}$$

Cei trei termeni pot fi scrişi formal ca valori medii ale anumitor operatori:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \overline{\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}} + \frac{1}{i\hbar}\overline{[\hat{A}, \hat{H}]} \tag{4.120}$$

Relaţia (4.2.120) reprezintă legea de evoluţie pentru valoarea medie a unei observabile. Ea aminteşte de rezultatul mecanicii clasice pentru derivata în raport cu timpul a unei funcţii oarecare de

variabilele canonice p şi q ale unui sistem şi de timp:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_{cl}\} \qquad (4.121)$$

unde $\{f, H_{cl}\}$ este paranteza Poisson dintre funcţia f şi funcţia clasică a lui Hamilton pentru sistemul studiat.

Relaţia (4.2.120) este valabilă şi în cazul stărilor mixte.

• Stări staţionare

Fie un sistem care evoluează în condiţii exterioare independente de timp. În acest caz, conform principiului IV, operatorul hamiltonian $\hat{H}$ coincide cu operatorul energiei. Fie vectorul de stare ce caracterizează sistemul la un moment dat:

$$|\psi_{st}(t)>=|u_m> e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} \qquad (4.122)$$

unde E_m este o valoare proprie din spectrul discret al energiei, iar $|u_m>$ un vector propriu corespunzător operatorului energiei (hamiltonian) ce satisface ecuaţia cu valori proprii:

$$\hat{H}|u_m>=E_m|u_m> \qquad (4.123)$$

Acţiunea operatorului energiei asupra vectorului de stare $|\psi_{st}>$ va fi:

$$\hat{H}|\psi_{st}>=e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}\hat{H}|u_m>=E_m|\psi_{st}> \qquad (4.124)$$

Se verifică imediat că vectorul de stare $|\psi_{st}>$ verifică ecuaţia Schrödinger temporală (4.2.111), deci $|\psi_{st}>$ este o soluţie a a ecuaţiei Schrödinger temporale, pentru o dependenţă de timp factorizată. Starea descrisă de vectorul de stare (4.2.122) se numeşte

stare staţionară şi are următoarele proprietăţi:

- la orice moment de timp, $|\psi_{st}(t) >$ este un vector propriu al operatorului energiei (4.2.123), astfel încât în starea descrisă de el **energia sistemului are o valoare bine determinată**
- în starea descrisă de relaţia (4.2.122) **statistica oricărei observabile independente de timp este constantă în timp**, ceea ce conduce la următoarea relaţie:

$$\overline{[\hat{A}, \hat{H}]} = 0 \tag{4.125}$$

proprietate ce se verifică imediat pe baza relaţiei (4.2.124) şi a hermiticităţii operatorului $\hat{H}$.

4.2.5 Principiul V

Procesul de măsurare a unei observabile este un proces de interacţie a unui sistem cuantic cu un aparat de măsură, un sistem macroscopic ce ascultă de legile fizicii clasice. În urma unei măsurători sistemul cuantic ia valori bine determinate pentru unele dintre observabilele sale, conform principiilor II şi III. Măsurătoarea însă modifică starea sistemului. Corectitudinea previziunilor asupra comportării sistemului asupra căruia s-a efectuat o măsurătoare poate fi în principiu testată prin noi măsurători.
Experienţa arată că, dacă pentru un sistem măsurăm observabila A şi găsim rezultatul a, şi **imediat după aceea** măsurăm din nou observabila A obţinem acelaşi rezultat a.

Enunţ: dacă se măsoară efectiv observabila A pentru un sistem fizic descris de vectorul de stare $|\psi >$ şi se obţine rezultatul a_n, atunci vectorul de stare imediat după efectuarea măsurătorii

este:

$$|\psi' >= |\psi_{a_n} >= \frac{P_{a_n}|\psi >}{\sqrt{< \psi|P_{a_n}|\psi >}} \quad (4.126)$$

unde P_{a_n} este proiectorul pe subspaţiul asociat valorii proprii.

Observaţii şi consecinţe

• Enunţul principiului V de mai sus, făcut pentru cazul pur se poate extinde cu uşurinţă la cazul mixt.
• Principiul V afirmă producerea unui salt al vectorului de stare în urma operaţiei de măsurare a unei observabile, în contrast cu evoluţia continuă a vectorului de stare atunci când asupra sistemului nu se intervine cu aparate de măsură. Rezultatul este diferit de cel din Mecanica clasică, unde efectuarea unei măsurători asupra unui sistem poate fi condusă astfel încât practic să nu se modifice starea sistemului.
După măsurătoare vectorul de stare evoluează din nou continuu, pornind de la starea (4.2.126), respectând ecuaţia Schrődinger generalizată (4.2.111) atâta timp cât sistemul nu mai este perturbat de o altă măsurătoare.
• Starea obţinută în urma măsurătorii este determinată nu numai de starea anterioară măsurătorii, ci şi de interacţia dintre sistem şi aparatul de măsură, care a condus la realizarea rezultatului a_n. Situaţia aceasta este duferită de cea din fizica clasică, unde rezultatele unei măsurători evidenţiază numai proprietăţile sistemului şi permit determinarea stării.
• În paragraful (4.1.6) am introdus noţiunea de observabile compatibile şi incompatibile plecând de la comutatorul lor. Am vazut că, pentru două observabile, condiţia necesară şi suficientă ca să fie compatibile este ca operatorii asociaţi să admită un sistem comun de vectori proprii. Conform principiului V, două observabile

compatibile ce caracterizează starea unui sistem sunt **simultan** bine determinate.

4.3 Probleme

4.1 Folosind regulile algebrei "*bra-ket*" demonstraţi următoarele relaţii:

(a) $tr(\hat{X}\hat{Y}) = tr(\hat{Y}\hat{X})$;
(b) $(\hat{X}\hat{Y})^t = \hat{X}^t\hat{Y}^t$ unde $\hat{X}, \hat{Y}$ sunt doi operatori oarecare.

Rezolvare:

a. Să considerăm o bază ortonormată $| a >$. Conform definiţiei trasei, în reprezentarea matriceală:

$$tr(\hat{X}\hat{Y}) = \sum_{(a)} < a \mid \hat{X}\hat{Y} \mid a >$$

Dacă introducem un nou set complet de stări:

$$\begin{aligned}
tr(\hat{X}\hat{Y}) &= \sum_{(a)}\sum_{(a')} < a \mid \hat{X} \mid a' >< a' \mid \hat{Y} \mid a > \\
&= \sum_{(a)}\sum_{(a')} < a' \mid \hat{Y} \mid a >< a \mid \hat{X} \mid a' > \\
&= \sum_{(a')} < a' \mid \hat{X}\hat{Y} \mid a' > \\
&= tr(\hat{Y}\hat{X})
\end{aligned}$$

S-a folosit faptul că:

$$< a \mid \hat{X} \mid a' > \;\; < a' \mid \hat{Y} \mid a >$$

sunt numere deci comută între ele.
Problema se poate generaliza pentru cazul a n operatori $(\hat{X}_n)$. Trasa produsului dintre aceştia posedă proprietatea de ciclicitate, în sensul că:

$$tr(\hat{X}_1\hat{X}_2...\hat{X}_n) = tr(\hat{X}_n\hat{X}_1...\hat{X}_{n-1})$$

b. Pornim de la un element oarecare al matricei transpuse $(\hat{X}\hat{Y})^t$:

$$\begin{aligned}
< \ & a \mid \left(\hat{X}\hat{Y}\right)^t \mid b >=< b \mid \hat{X}\hat{Y} \mid a >^* \\
= & \sum_{(c)} < b \mid \hat{X} \mid c >^* < c \mid \hat{Y} \mid a >^* \\
= & \sum_{(c)} < c \mid \hat{Y} \mid a >^* < b \mid \hat{X} \mid c >^* \\
= & \sum_{(c)} < a \mid \hat{X}^t \mid c >< c \mid \hat{Y}^t \mid b > \\
= & < a \mid \hat{X}^t\hat{Y}^t \mid b >
\end{aligned}$$

Ca urmare s-a demonstrat relaţia:

$$(\hat{X}\hat{Y})^t = \hat{X}^t\hat{Y}^t$$

4.2 Să se demonstreze că operatorii:.

(a) componente impuls: $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$;

(b) hamiltonian pentru o particulă liberă

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

sunt hermitici.

Rezolvare:

a. Un operator $\hat{A}$ este hermitic dacă şi numai dacă:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^* \hat{A} v dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(u\hat{A}\right)^* v dx$$

unde s-a considerat că funcţiile u,v depind doar de coordonata x :

$$\begin{aligned} u &= u(x) \\ v &= v(x) \end{aligned}$$

În cazul în care operatorul $\hat{A}$ coincide cu operatorul impuls:

$$\hat{A} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

se obţine:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^* \left(-i\hbar\frac{dv}{dx}\right) dx &= -i\hbar \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^* dv \\ &= -i\hbar u^* v \mid_{-\infty}^{+\infty} + i\hbar \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v\frac{du^*}{dx} dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v \left(-i\hbar\frac{du}{dx}\right)^* dx \end{aligned}$$

Primul termen este nul deoarece descreşte suficient de repede în apropierea limitelor de integrare. S-a obţinut astfel ceea ce trebuia demonstrat.

În mod similar se procedează şi pentru celelalte două componente.

b. Problema este rezolvată dacă se verifică faptul că operatorii:

$$\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2$$

sunt hermitici. Fie:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ w &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Atunci se obţine:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u^* \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^* \frac{\partial w}{\partial x} dx \\ &= u^* w \mid_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} w \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} w \frac{\partial u^*}{\partial x} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \end{aligned}$$

Pe de altă parte membrul al doilea al condiţiei de ciclicitate este:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^* v dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} v dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right) v dx \\ &= \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right) v \mid_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right) \frac{\partial v}{\partial x} dx \end{aligned}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right) \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Deoarece s-a obţinut acelaşi rezultat operatorul $\partial^2/\partial x^2$este hermitic. La fel se procedează şi cu $\partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2$. Folosind regulile de calcul (adunarea) între operatorii hermitici rezultatul cerut de punctul (b) este evident.

4.3 I Să se demonstreze următoarele relaţii dintre operatorii $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

(a) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$;

(b) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

II Să se arate că dacă $\hat{A}, \hat{B}$ sunt operatori ce verifică relaţia:

$$\left[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}^m\right] = 0$$

atunci:

$$[\hat{A}^m, \hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}]$$

Rezolvare:

I Folosim definiţia comutatorilor:

a.

$$\begin{aligned}
[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \left(\hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{A}\hat{C}\hat{B}\right) \\
&= \hat{A}\left(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}\right) + \left(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\right)\hat{B} \\
&= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \left(\hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C}\right) \\
&= \hat{B}\left(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\right) + \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\hat{C} \\
&= \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}
\end{aligned}$$

II Demonstrăm valabilitatea acestei relaţii prin inducţie:

- $m = 1$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]$$

- presupunem relaţia adevărată pentru m :

$$[\hat{A}^m, \hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}]$$

- demonstrăm pentru $m + 1$.

  Înmulţim relaţia anterioară la stânga cu $\hat{A}$ ş i apoi adunăm cantitatea $\hat{A}^m\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)$ în ambii termeni:

$$\begin{aligned}
\hat{A}[\hat{A}^m, \hat{B}] &= \hat{A}\left(\hat{A}^m\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^m\right) = \hat{A}^{m+1}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m \\
&= m\hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] = m\hat{A}^m\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) \\
\hat{A}[\hat{A}^m, \hat{B}] + \hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] &= m\hat{A}^m\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) + \hat{A}^m\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) \\
&= (m+1)\hat{A}^m\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) = (m+1)\hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}]
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, condiţia problemei înseamnă:

$$\left[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}^m\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
[\hat{A},\hat{B}]\hat{A}^m - \hat{A}^m[\hat{A},\hat{B}] &= 0 \\
\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}^m &= \hat{A}^m\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)
\end{aligned}$$

Deci revenind în relaţiile anterioare:

$$\begin{aligned}
\hat{A}[\hat{A}^m,\hat{B}] + \hat{A}^m[\hat{A},\hat{B}] &= \hat{A}\hat{A}^m\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m + A^m\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right) \\
&= \hat{A}^{m+1}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m + \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\hat{A}^m \\
&= \hat{A}^{m+1}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m + \hat{A}\hat{B}\hat{A}^m - \hat{B}\hat{A}^{m+1} \\
&= \hat{A}^{m+1}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^{m+1}
\end{aligned}$$

Ca urmare relaţia este adevărată şi pentru $m+1$.

$$[\hat{A}^{m+1},\hat{B}] = (m+1)\,\hat{A}^m[\hat{A},\hat{B}]$$

4.4 Să se demonstreze valabilitatea următoarelor relaţii de comutare:

a. $[\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar$; $[\hat{x},\hat{p}_y] = 0$; $[\hat{p}_x,\hat{p}_y] = 0$;
b. $[\hat{x},\hat{l}_x] = 0; [\hat{x},\hat{l}_y] = i\hbar\hat{z}$;
c. $[\hat{l}_x,\hat{l}_y] = i\hbar\hat{l}_z; [\hat{l}_y,\hat{l}_z] = i\hbar\hat{l}_x; [\hat{l}_z,\hat{l}_x] = i\hbar\hat{l}_y$;
d. $[\hat{l}^2,\hat{l}_x] = 0$
unde $\hat{l}-$operatorul moment cinetic; $\hat{l}_x,\hat{l}_y,\hat{l}_z-$ componentele acestuia într-un sistem de referinţă cartezian.

Rezolvare:

a.

$$[\hat{x},\hat{p}_x]\psi = \hat{x}\hat{p}_x\psi - \hat{p}_x\hat{x}\psi$$

$$\begin{aligned}
&= x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x\psi \\
&= -i\hbar\left[x\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(x\psi)\right] \\
&= -i\hbar\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \\
&= i\hbar
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{x},\hat{p}_y]\psi &= \hat{x}\hat{p}_y\psi - \hat{p}_y\hat{x}\psi \\
&= x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)x\psi \\
&= -i\hbar\left[x\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(x\psi)\right] \\
&= -i\hbar\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{p}_x,\hat{p}_y]\psi &= \hat{p}_x\hat{p}_y\psi - \hat{p}_y\hat{p}_x\psi \\
&= \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi \\
&= -\hbar^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\psi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Rezultatele se pot generaliza sub forma:

$$[\hat{q}_i,\hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} = \{ \begin{array}{l} i\hbar, i=j \\ 0, i\neq j \end{array}$$

b. Momentul unghiular se calculează ca:

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$$

unde componentele pe axele carteziene cu ajutorul definiţiei:

$$\begin{aligned}
\widehat{\vec{l}} &= \widehat{\vec{r}} \times \widehat{\vec{p}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix} \\
\hat{l}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar\left(\hat{y}\frac{\partial}{\partial z} - \hat{z}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\hat{l}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar\left(\hat{z}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{x}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
\hat{l}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar\left(\hat{z}\frac{\partial}{\partial y} - \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Ca urmare folosind definiţiile operatorilor, observaţia că:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0; \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

şi proprietăţile comutatorilor se poate scrie:

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{l}_x] &= [\hat{x}, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y] = [\hat{x}, \hat{y}\hat{p}_z] - [\hat{x}, \hat{z}\hat{p}_y] \\
&= \hat{y}[\hat{x}, \hat{p}_z] + [\hat{x}, \hat{y}]\hat{p}_z - \hat{z}[\hat{x}, \hat{p}_y] - [\hat{x}, \hat{z}]\hat{p}_y \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{l}_y] &= [\hat{x}, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] = [\hat{x}, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{x}, \hat{x}\hat{p}_z] \\
&= \hat{z}[\hat{x}, \hat{p}_x] + [\hat{x}, \hat{z}]\hat{p}_x - \hat{x}[\hat{x}, \hat{p}_z] - [\hat{x}, \hat{x}]\hat{p}_z \\
&= i\hbar z
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
[\hat{l}_x, \hat{l}_y] &= [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] \\
&= \hat{y}\hat{z}[\hat{p}_z, \hat{p}_x] + \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{z}]\hat{p}_x + \hat{z}[\hat{y}, \hat{p}_x]\hat{p}_z + \hat{p}_x[\hat{y}, \hat{z}]\hat{p}_z + \\
&\quad + \hat{z}\hat{x}[\hat{p}_y, \hat{p}_z] + \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{x}]\hat{p}_z + \hat{x}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y + [\hat{z}, \hat{x}]\hat{p}_z\hat{p}_y \\
&= \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{z}]\hat{p}_x + \hat{x}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y \\
&= -\hat{y}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_x + \hat{x}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y \\
&= (-\hat{y}\hat{p}_x + \hat{x}\hat{p}_y)[\hat{z}, \hat{p}_z] = \\
&= i\hbar\hat{l}_z
\end{aligned}$$

Celelalte relaţii de la punctul (c) rezultă prin permutări ciclice.
d

$$\begin{aligned}
[\hat{l}^2, \hat{l}_x] &= [\hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2, \hat{l}_x] \\
&= [\hat{l}_x^2, \hat{l}_x] + [\hat{l}_y^2, \hat{l}_x] + [\hat{l}_z^2, \hat{l}_x] \\
&= \hat{l}_x[\hat{l}_x, \hat{l}_x] + [\hat{l}_x, \hat{l}_x]\hat{l}_x + \hat{l}_y[\hat{l}_y, \hat{l}_x] + \\
&\quad + [\hat{l}_y, \hat{l}_x]\hat{l}_y + \hat{l}_z[\hat{l}_z, \hat{l}_x] + [\hat{l}_z, \hat{l}_x]\hat{l}_z \\
&= i\hbar\left(\hat{l}_y\hat{l}_z - \hat{l}_z\hat{l}_y + \hat{l}_z\hat{l}_y - \hat{l}_y\hat{l}_z\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

4.5 Fie o particulă cuantică descrisă de funcţia de undă:

$$\psi(x) = A\exp(-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0x)$$

unde A, a, x_0- constante. Să se calculeze următoarele mărimi medii:

(a) $\langle x \rangle \, ; \langle \Delta x \rangle \, ;$

(b) $\langle p \rangle \, ; \langle \Delta p \rangle \, ;$

(c) $\langle x^2 \rangle \, ; \langle \Delta x^2 \rangle \, ;$

(d) $\langle p^2 \rangle \, ; \langle \Delta p^2 \rangle$

Se cunosc integralele:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-ax^2\right) dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}$$

(vezi Anexa 3)

Rezolvare:

a. Folosim definiţia valorilor medii şi ţinem cont de faptul c ă funcţia de undă are o parte reală şi una imaginară:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= A \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \exp(ik_0 x) \\
\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \, |\psi|^2 \, dx \\
&= |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 0
\end{aligned}$$

$$\langle \Delta x \rangle = x - \langle x \rangle$$

b.

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* p \psi dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \\
&= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-\frac{x}{a^2} + ik_0 \right) \psi dx \\
&= i\hbar \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx + \hbar k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx \\
&= \hbar k_0
\end{aligned}$$

unde s-a folosit condiţia de normare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

$$\langle \Delta p \rangle = p - \langle p \rangle$$

c.

$$\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left| \psi \right|^2 dx \\
&= \left| A \right|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} \right) dx = \left| A \right|^2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a^3
\end{aligned}$$

Amplitudinea se determină din condiţia de normare:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx &= 1 \\
|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx &= |A|^2 a\sqrt{\pi} \\
|A|^2 &= \frac{1}{a\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} a^3 = \frac{1}{2} a^2$$

$$\left\langle \Delta x^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2} a^2$$

d.

$$\begin{aligned}
\left\langle p^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* p^2 \psi dx = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx \\
&= \frac{\hbar^2}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx - \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-\frac{x}{a^2} + ik_0\right)^2 \psi dx \\
&= \frac{\hbar^2}{a^2} - \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(\frac{x^2}{a^4} - 2ik_0 \frac{x}{a^2} - k_0^2\right) \psi dx \\
&= \frac{\hbar^2}{2a^2} + \hbar^2 k_0^2
\end{aligned}$$

Rezultatul cerut este:

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2a^2} + \hbar^2 k_0^2 - \hbar^2 k_0^2 = \frac{\hbar^2}{2a^2}$$

4.6 (a) Să se găsească soluţia ecuaţiei Schrodinger atemporal ă pentru o particulă care se mişcă într-o cutie rigidă unidimensională cu pereţi în punctele $x = 0$ şi $x = 5a$, $a-$ constantă pozitivă.

(b) Să se determine valorile proprii ale energiilor.
(c) Să se scrie funcţiile proprii asociate.

Rezolvare:

(a). Ecuaţia diferenţială atemporală a lui Schrödinger pentru această mişcare este:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

Facem notaţia:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Ecuaţia diferenţială ce trebuie rezolvată devine:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0$$

cu condiţiile la limită:

$$\psi(0) = \psi(5a) = 0$$

Analizăm cazurile posibile ale mişcării:

- $E < 0 \Rightarrow k^2 < 0$. In acest caz ecuaţia caracteristică are soluţii reale şi deci funcţia de undă va fi exprimată prin soluţii cu exponent real, deci nemărginite. Condiţiile la limite impun îns ă anularea funcţiei de undă în aceste puncte, deci condiţia $E < 0$ nu poate fi posibilă.

- $E < 0 \Rightarrow k^2 < 0$.

In acest caz ecuaţia caracteristică are soluţii imaginare şi deci funcţia de undă va fi exprimată prin soluţii cu exponent imaginar, deci mărginite.

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

Constantele A, B se determină din condiţiile la limită:

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A \sin 5ak &= 0 \Rightarrow \\ 5ak_n &= n\pi, n = 0, 1, 2, ... \\ k_n &= \frac{n\pi}{5a} \end{aligned}$$

(b). Revenind în notaţia lui k obţinem valorile proprii ale energiei:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{5a} \right)^2 n^2$$

S-a obţinut un spectru discret de valori cuantificat de numărul n^2.

(c) Funcţiile proprii asociate acestor valori ale lui k_n sunt:

$$\begin{aligned} \psi_n &= A_n \sin k_n x \\ &= A_n \sin \frac{n\pi}{5a} x \end{aligned}$$

Constanta A_n o determinăm din condiţia de normare:

$$\int_0^{5a} \mid \psi_n \mid^2 dx = 1 \Rightarrow A_n^2 \int_0^{5a} \left(\sin \frac{n\pi}{5a} x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} A_n^2 \int_0^{5a} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{5a} x\right) dx = \frac{5a}{2} A_n^2 = 1$$

$$\Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{5a}}$$

Ca urmare:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{5a}} \sin \frac{n\pi}{5a} x$$

4.7 O particulă este descrisă de funcţia de undă:

$$\psi(x) = \{ \begin{array}{l} Ax, -a \leq x \leq a \\ 0, x < -a, x > a \end{array}$$

(a) Determinaţi constanta A din condiţia de normare;
(b) Calculaţi probabilitatea de a găsi particula undeva în regiunea $0 \leq x \leq \frac{1}{2}a$.
(c) Calculaţi poziţia medie a particulei.

Rezolvare:

(a) Condiţia de normare conduce la:

$$\int_{-a}^{a} \mid \psi_n \mid^2 dx = 1$$

$$
\begin{aligned}
|\ A\ |^2 \int_{-a}^{a} x^2 dx = 1 \\
|\ A\ |^2 \frac{2a^3}{3} = 1 \\
A = \sqrt{\frac{3}{2a^3}}
\end{aligned}
$$

(b) Probabilitatea de a găsi particula undeva în zona $0 \leq x \leq \frac{1}{2}a$ este:

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{a/2} |\ \psi_n\ |^2\ dx &= \frac{3}{2a^3} \int_{0}^{a/2} x^2 dx \\
&= \frac{3}{2a^3} \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} = \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

(c) Valoarea medie a poziţiei particulei este:

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \psi_n x \psi_n^* dx &= \int_{-a}^{a} x\ |\ \psi_n\ |^2\ dx \\
&= \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^{a} x^4 dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Valoarea aşteptată a poziţiei particulei se află în pozi ţia centrală.

4.8 Să se determine soluţia ecuaţiei Schrodinger dependent ă de

timp a unei particule de masă m şi impuls $\vec{p}$ care se mişcă unidimensional într-un spaţiu caracterizat de potenţialul constant V_0.

Rezolvare:

Ecuaţia Schrödinger dependentă de timp este:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} + V_0 \psi(x,t)$$

Pentru a rezolva această ecuaţie vom căuta o soluţie de forma:

$$\psi(x,t) = \varphi(x) F(t)$$

în care variabilele spaţiu şi timp sunt separate. După înlocuire în ecuaţie găsim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}\frac{df}{dt} &= -\frac{i}{\hbar}C \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{\partial x^2} + V_0\varphi &= C\varphi \end{aligned}$$

Din prima ecuaţie diferenţială, după separarea variabilelor f şi t şi integrare, rezultă ($C-$constant):

$$\begin{aligned} \int \frac{df}{f} &= -\frac{i}{\hbar}C\int dt \\ f &= f_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ct\right), f_0 - const. \end{aligned}$$

Propunem ca soluţie pentru cea de-a doua ecuaţie diferenţială , forma exponenţială

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right)$$

Verificând această soluţie rezultă:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{i}{\hbar}p\right)^2 + V_0 &= C \\ \frac{p^2}{2m} + V_0 &= C \end{aligned}$$

adică tocmai energia totală a particulei, care poate avea orice valoare posibilă (spectru discret). Soluţia generală devine:

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \varphi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right) f_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ct\right) \\ &= A \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Ct)\right] \\ &= A \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \left(\frac{p^2}{2m} + V_0\right)t\right)\right] \end{aligned}$$

Conform principiului superpoziţiei stărilor şi considerând $\mathrm{V}_0 = 0$, soluţia generală în reprezentarea impulsului este:

$$\psi(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(p) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right] dp$$

.1 Elemente de calcul variaţional

O funcţională este o generalizare a unei funcţii matematice. Ea reprezintă o regulă prin care unei funcţii oarecare i se asociază un număr.

Acţiunea se defineşte ca:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

Condiţia ca funcţia să aibă un extrem, implică:

$$\delta S = 0$$

Această mărime corespunde variaţiei funcţiei la trecerea de la o traiectorie $q_i(t)$ ($i = \overline{1,l}$) la alta $q_i'(t)$ ($i = \overline{1,l}$) pentru care se produce o variaţie a coordonatelor generalizate cu $\delta q = q_i'(t) - q_i(t)$ şi ale vitezelor generalizate corespunzătoare:

$$\delta \dot{q}_i(t) = \dot{q}_i'(t) - \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}[q_i'(t) - q_i(t)] = \frac{d}{dt}\delta q_i$$

Variaţia funcţionalei ar corespunde unei comutări de pe o traiectorie pe alta:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)dt - L(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$$

sau

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt$$

deoarece deplasările virtuale nu depind de timp.
Deoarece:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

atunci,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{l}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]$$

Cum $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, din relaţia de mai sus rezultă:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Atunci, variaţia acţiunii va lua forma:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{l}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i dt$$

Conform principiului lui Hamilton, dacă traiectoria este reală, atunci ultima integrală trebuie să se anuleze oricare ar fi variaţiile δq_i. Deoarece aceste deplasări sunt independente între ele, pentru ca variaţia δS să fie nulă este necesar ca:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad k = \overline{1,l}$$

adică ecuaţiile lui Lagrange.

Anexa A

Funcţia δ

Simbolul $\delta(x)$ introdus de Dirac (1930) nu notează o funcţie, ci un anumit proces de trecere la limită , întâlnit în multe probleme de fizică. Proprietăţile mărimii $\delta(x)$ sunt concentrate în relaţiile de mai jos:

a. $\delta(x) = 0$ pentru $x \neq 0$

b. $\delta(0)$ are o valoare nemărginit de mare

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$

Funcţia $f(x)$ se presupune continuă şi cu derivate continue. Pentru $f(x) = 1$ rezultă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1 \tag{A.1}$$

În general, întâlnim funcţia $\delta(x - x_o)$ care are punctul de singularitate în $x = x_o$ şi pentru care vor fi valabile relaţiile:

a. $\delta(x - x_o) = 0$ pentru $x \neq 0$

b. $\delta(x - x_o)$ este nemărginită pentru $x = x_o$

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_o)dx = f(x_o)$

Din aceste ultime proprietăţi rezultă că:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_o)dx = f(x_o) \quad \text{dacă} \quad x_o \in [a, b]$$
$$0 \quad \text{dacă} \quad x_o \in [a, b] \qquad \text{(A.2)}$$

Anexa B

Integrale Poisson

Integralele Poisson sunt de tipul:

$$I_n = \int_0^\infty e^{-ax^2} x^n dx, n \in N$$

Una din metodele de rezolvare este integrarea prin părţi:

$$\begin{aligned} I_{n=} \int_0^\infty e^{-ax^2} x^n dx &= -\frac{1}{2a} \int_0^\infty d\left(e^{-ax^2}\right) x^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2a}\left(e^{-ax^2} x^{n-1}\right) |_0^\infty + \frac{n-1}{2a} \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{n-2} dx \\ &= \frac{n-1}{2a} I_{n-2}, n \geq 2, n \in N \end{aligned}$$

S-a obţinut astfel o relaţia de recurenţă care permite găsirea tu-

turor integralelor I_n cunoscând valoarea corespunzătoare lui n=0:

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx$$

- $n = 1:$

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-ax^2} x dx = \frac{1}{2a}$$

- $n = 2:$

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-ax^2} x^2 dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

- $n = 3:$

$$I_3 = \int_0^\infty e^{-ax^2} x^3 dx = \frac{1}{4a^3}$$

- $n = 4$

$$I_4 = \int_0^\infty e^{-ax^2} x^4 dx = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Bibliografie

[**1**] Şerban Ţiţeica, *Curs de MECANICĂ TEORETICĂ - Noţiunile şi legile Mecanicii newtoniene*, Universitatea Bucureşti, Facultatea de Fizică, Bucureşti, 1975

[**2**] Şerban Ţiţeica, *Curs de MECANICĂ TEORETICĂ - Mecanică analitică*, Universitatea Bucureşti, Facultatea de Fizică, Bucureşti, 1978

[**3**] Viorica Florescu, *Mecanică cuantică*, partea I-a, Universitatea Bucureşti, Facultatea de Fizică, Bucureşti, 1979

[**4**] I.M. Popescu, *Fizică, vol. I, II*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

[**5**] Traian I. Creţu, *FIZICA - Curs universitar*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996

[**6**] Emil Petrescu, *Fizica - vol. II*, Editura Bren, Bucureşti, 2003 [**7**] M. Sanduloviciu, *Me-*

canica, litografia Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, Iaşi, 1983

[**8**] Atam P. Arya, *Introduction to Classical Mechanics*, Prentice Hall International, Inc., 1990

[**9**] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland, Amsterdam, 1968